Beiträge zur Pfeilgeometrie

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät II, der Universität Bern

Vorgelegt von
Rudolf Brönnimann
von Zimmerwald

Beiträge zur Pfeilgeometrie

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät II, der Universität Bern

Vorgelegt von
Rudolf Brönnimann
von Zimmerwald

Unionsdruckerei Bern
1925

Die vorliegende Dissertation ist unter der Leitung von Herrn Professor Dr. F. GONSETH entstanden. Ich habe im Verlaufe der gemeinsamen Arbeit stete Hilfsbereitschaft und grosses Wohlwollen erfahren dürfen. Es ist mir ein inneres Bedürfnis, dafür an erster Stelle den verehrten Lehrer meines herzlichsten Dankes zu versichern.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Von der Philosophischen Fakultät II, auf Antrag von Prof. Dr. F. Gonseth angenommen.

Bern, den 13. Juli 1925.

Der Dekan:

Prof. Dr. R. Zeller.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549616_0083

I. KAPITEL.

§ 1. Einleitung.

Die Herren R. de Saussure und C. Cailler haben in den nachfolgend zitierten Abhandlungen über Pfeilgeometrie die wesentlichen Figuren derselben definiert und untersucht.

R. de Saussure:

« *Mouvement d'un fluide dans un plan* », Archives des sciences phys. et naturelles, 1898.

« *Théorie géométrique du mouvement des corps* », Archives, tome XIII et XIV, 1902.

« *Exposé résumé de la géométrie des feuillets* », Mémoires de la Société de physique, vol. 36, 1910.

C. Cailler:

« *Notes sur la théorie du couronoide* », Archives, tome XXI, 1906, et vol. 46, oct. 1918.

« *Sur une interprétation euclidienne de la géométrie de Riemann à trois dimensions et sur la cinématique des figures sphériques se déplaçant sur leur propre sphère* », Archives, vol. 46, sept. 1918.

Durch Einführung komplexer Variabeln gab Herr C. Cailler den gewonnenen Resultaten allgemeinere Geltung. Zuletzt hat Fräulein M. Kaufmann in ihrer Dissertation, « *Géométrie des flèches dans le plan couronoide* », Diss. Genf, eine zusammenfassende analytische Theorie der hauptsächlichsten Pfeilgebilde gegeben.

Ganz andere Wege zum Studium des nämlichen Gegenstandes schlägt Herr Matasaru ein in seiner Doktorarbeit, « *Sur un groupe de transformations du plan et sur la Géométrie des flèches* », Diss. Bern. Gestützt auf die Tatsache, dass die Pfeilebene ∞^3 Pfeile enthält, und auf die sich daraus ergebende Möglichkeit einer Abbildung dieser Ebene auf die Punkte des Raumes, bedient er sich eines Abbildungsverfahrens, das ihm erlaubt, mittels der Methode der analytischen Geometrie des Raumes die Figuren der Pfeilebene zu studieren.

In der vorliegenden Arbeit wird weiter von dieser Methode Gebrauch gemacht. Sie hat die spezielle Bedeutung des bisherigen Hauptbegriffes der Pfeilgeometrie « inverse Pfeile » (nach de Saussure) deutlich werden lassen. Herr Matasaru hat

in Verfolgung dieser Betrachtungsweise gezeigt, dass die Gesamtheit der Pfeile f der Pfeilebene, die zu einem fest gewählten Pfeil f_0 dieser Ebene « invers » (nach de Saussure) ist, im Bildraume auf einen linearen Komplex führt, und zwar, was wesentlich ist, auf einen speziellen Komplex. In diesem Umstand liegt auch schon die Veranlassung dazu, eine allgemeinere Fassung des de Saussureschen Begriffes « invers » zu suchen, die dann im Bildraum auch sofort auf den allgemeinsten linearen Komplex führen müsste.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit liegt in der erwähnten möglichen Verallgemeinerung des de Saussureschen Falles.

In der Geometrie der Pfeile spielt, wie eingangs erwähnt, die Betrachtung « *inverser* » Pfeile eine ganz besonders wichtige Rolle. Auf der Eigenschaft des « Inverseins » baut sich alles übrige auf.

Definition:

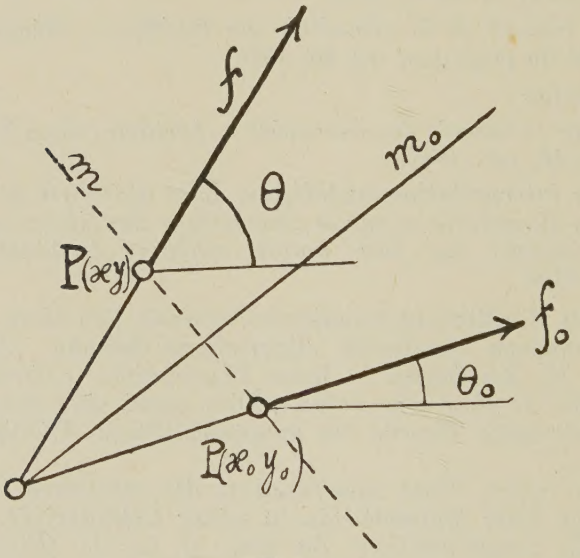

Fig. 1

f = beliebiger Pfeil der Ebene.
f_0 = festgewählter Pfeil.
m = Richtungskoeffizient der Verbindungsgeraden der Angriffspunkte von f und f_0.
m_0 = Richtungskoeffizient der Winkelhalbierenden der zwei Geraden, auf denen f und f_0 liegen.

Die Bedingung für die inverse Lage von f und f_0 lautet dann

$$m\, m_0 = -1.$$

Das Turbinoid. Das Turbinoid ist die Gesamtheit aller Pfeile f der Ebene, die zu einem festen f_0 invers ist. Setzt man die berechneten Werte von m und m_0 in die Bedingungsgleichung ein, so erhält man nach Definition als Gleichung des Turbinoides:

$$(b+b_0)\,(y-y_0)+(a+a_0)\,(x-x_0)=0$$

(xy) und (x_0y_0) sind die Koordinaten der Angriffspunkte von f und f_0, a, a_0 und b, b_0 stellen die Richtungskosinus der Geraden von f und f_0 dar. Durch Einführung neuer Variabeln:

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos\frac{\theta}{2} \\ v &= \sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \quad \theta = \text{Winkel zwischen } f \text{ und positiver } x\text{-Achse}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \cos\frac{\theta_0}{2} \\ v_0 &= \sin\frac{\theta_0}{2} \end{aligned}\right\} \quad \theta_0 = \text{Winkel zwischen } f_0 \text{ und positiver } x\text{-Achse}$$

kann die Beziehung auf die Form gebracht werden:

$$(u_0u-v_0v)\,(x-x_0)+(u_0v+v_0u)\,(y-y_0)=0$$

Der feste Pfeil f_0 heisst Achse des Turbinoides.

Abbildung I.

Der Pfeil wird durch drei beliebig wählbare Bestimmungsstücke festgelegt, durch x, y die Koordinaten des Angriffspunktes und durch θ den Winkel, den f mit der positiven x-Achse einschliesst. Der Zahl der frei wählbaren Koordinaten entsprechend, enthält die Ebene ∞^3 Pfeile. Bei geeigneter Wahl der Transformationsformeln muss es möglich sein, die ∞^3 Pfeile der Ebene eindeutig auf die ∞^3 Punkte des R_3 abzubilden. Um zu einer solchen Uebersetzung der Pfeilgeometrie in die Punktgeometrie des Raumes zu gelangen, hat Herr Matasaru die Pfeile der Ebene $f(xy\theta)$ oder $f(xym = cotg\,\frac{\theta}{2})$ den räumlichen Bildpunkten $P(X, Y, Z = m)$ durch die folgenden Transformationsformeln zugeordnet:

$$X = mx+y,\; Y = x-my;\; Z = m = cotg\,\frac{\theta}{2}$$

In dieser Abbildung entsprechen sich die folgenden Stücke:

Pfeil der Ebene $f(xy\theta)$ ⟶ Punkt im $R_3 = P(XYZ)$
Turbine $(= \infty^1$ Pfeile) ⟶ Gerade des R_3 $(= \infty^1$ Punkte)
Turbinoid $(= \infty^2$ Pfeile) ⟶ Ebene des R_3 $(= \infty^2$ Punkte)
Inverse Pfeile ⟶ Konjugiertsein der Raumpunkte in bezug auf ein Focalsystem.

Die metrische Beziehung, welche zwischen zwei inversen Pfeilen im allgemeinen besteht, übersetzt sich dabei im Bildraum in eine projektive Beziehung zwischen den Bildpunkten, die das « Konjugiertsein » der Punkte in bezug auf ein Focalsystem (linearer Komplex) ausdrückt.

---

§ 2. Die Abbildung II.

Durch $mm_0 = -1$ ist eine Pfeilmannigfaltigkeit von ∞^2 Pfeilen, das Turbinoid, definiert. Es enthält ∞^2 Turbinen, d. h. Pfeilgebilde von je ∞^1 Pfeilen. Herr Matasaru wählte diese zwei Figuren als Grundlage seiner Abbildung. Eine weitere Gesamtheit von ∞^2 Pfeilen wird herausgegriffen durch die Bedingung

$$mm_0 = \mp 1$$

Die dadurch definierte Figur heisse *Antiturbinoid*. Es enthält auch ∞^2 Pfeilfiguren von je ∞^1 Pfeilen, die *Antiturbinen*

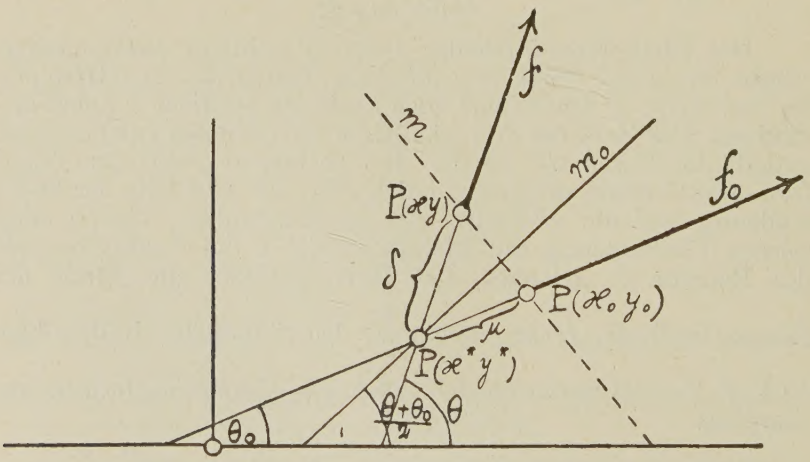

Fig. 2

Aus der Figur ergibt sich:

$m_0 =$ Richtungskoeffiz. der Winkelhalbierenden von f und f_0

$$= tg\,\frac{\theta+\theta_0}{2}$$

$m =$ Richtungskoeff. der Verbindungsgeraden der Angriffspunkte von f und $f_0 = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$

$$x = x^*+\delta a;\ a = cos\,\theta;\ x_0 = x^*+\mu a_0,\ a_0 = cos\,\theta_0$$
$$y = y^*+\delta b,\ b = sin\,\theta;\ y_0 = y^*+\mu b_0,\ b_0 = sin\,\theta_0$$

$$mm_0 = 1 \quad \text{verlangt} \quad \frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot tg\,\frac{\theta+\theta_0}{2} = 1$$

$$\text{oder} \quad \frac{\delta b-\mu b_0}{\delta a-\mu a_0}\cdot\frac{tg\,\frac{\theta}{2}+tg\,\frac{\theta_0}{2}}{1-tg\,\frac{\theta}{2}\,tg\,\frac{\theta_0}{2}} = 1$$

Wegen $b = 2uv;\ a = u^2-v^2;\ tg\,\frac{\theta}{2} = \frac{v}{u};\ tg\,\frac{\theta_0}{2} = \frac{v_0}{u_0}$

kann man schreiben

$$\left(\frac{v}{u}+\frac{v_0}{u_0}\right)\left(2\delta uv-2\mu u_0v_0\right) = \left(1-\frac{v}{u}\cdot\frac{v_0}{u_0}\right)\left[\delta(u^2-v^2)-\mu(u_0^2-v_0^2)\right]$$

oder da:

$$\delta = \frac{y-y^*}{2uv} = \frac{x-x^*}{u^2-v^2} \text{ und } \mu = \frac{y_0-y^*}{2u_0v_0} = \frac{x_0-x^*}{u_0^2-v_0^2}$$

lautet die Gleichung des Antiturbinoides:

$$(uu_0-vv_0)\ (x-x_0)-(u_0v+v_0u)\ (y-y_0) = 0$$

Von nun an soll ein beliebiger Pfeil f zu einem festen f_0 invers sein, wenn, bei der bisherigen Bedeutung von m und m_0, die Beziehung gilt $mm_0 = 1$

Die Bedeutung von invers ist jetzt eine andere als früher. In unserer Abbildung II entsprechen sich:

Pfeil der Ebene	⟶	**Punkt des Raumes**
Antiturbine (∞^1 Pfeile)	⟶	Gerade des R_3 (∞^1 Punkte)
Antiturbinoid (∞^2 Pfeile)	⟶	Ebene des R_3 (∞^2 Punkte)
Inverse Pfeile	⟶	(?)

Das räumliche Gegenstück zu den « inversen » Pfeilen der Abbildung II ist noch unbekannt. Es soll durch die nachfolgende Transformation ermittelt werden.

Transformation der Gleichung des Antiturbinoides.

Die eben erhaltene Gleichung des Antiturbinoides lässt sich wie folgt ordnen:

$$u_0(ux - vy) - u\,(u_0x_0 - v_0y_0) - v_0(vx + uy) + v(v_0x_0 + u_0y_0) = 0$$

Wir setzen:

$$X = ux - vy;\ Y = vx + uy;\ Z = u;\ T = v$$
$$X_0 = u_0x_0 - v_0y_0;\ Y_0 = v_0x_0 + u_0y_0;\ Z_0 = u_0;\ T_0 = v_0$$

oder inhomogen, indem alles durch T dividiert und nachher $T = 1$ gesetzt wird:

$$\frac{X}{T} = X;\ X = \frac{u}{v}x - y;\ X = mx - y \qquad wo\ m = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = ctg\,\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{Y}{T} = Y;\ Y = x + \frac{u}{v}y;\ Y = x + my$$

$$\frac{Z}{T} = Z;\ Z = \frac{u}{v} \qquad ;\ Z = m$$

$$\frac{T}{T} = 1;\ T = 1 \qquad ;\ T = 1$$

Für $X_0Y_0Z_0T_0$ hat man die entsprechenden Transformationsformeln mit dem Index null zu schreiben. Mit Einführung der neuen Variabeln geht das Antiturbinoid über in

$$Z_0X - ZX_0 - (Y - Y_0) = 0$$

Dies ist eine lineare Beziehung in $XYZX_0Y_0Z_0$ und stellt mit variabeln $X_0Y_0Z_0$ ein Focalsystem oder Komplexbüschel dar.

$$Z_0X - ZX_0 + k(Y - Y_0) = 0$$

Das Antiturbinoid liefert somit ein Komplexbüschel mit $k = -1$. Damit wissen wir auch, was inversen Pfeilen als Raumbild entspricht, und unsere neue Abbildung ist vollständig bestimmt.

§ 3. Die Polare.

In unserer Abbildung soll einer Antiturbine eine Raumgerade g entsprechen, oder wenn g als gegeben betrachtet wird, so muss sich aus der Gleichung einer beliebigen Geraden die Figur der Ebene ergeben. Uns interessiert jetzt: Was entspricht der Polaren g' von g in der Pfeilebene?

Geometrische Bedeutung der Polaren g' von g in der Pfeilebene.

g sei bestimmt durch die zwei Punkte $P_0(X_0Y_0Z_0)$ und $P(X_1Y_1Z_1)$. Die projizierenden Ebenen lauten:

$$(X_0-X_1)Y-(Y_0-Y_1)X = X_0Y_1-X_1Y_0$$
$$\text{und} \quad (X_0-X_1)Z-(Z_0-Z_1)X = X_0Z_1-X_1Z_0$$

Aus der ersten bekommt man nach der Transformation:

$$(X_0-X_1)\,(my+x)-(Y_0-Y_1)\,(mx-y) = (X_0Y_1-X_1Y_0)$$

und daraus

$$m = \frac{X_0Y_1-X_1Y_0-x(X_0-X_1)-y(Y_0-Y_1)}{X_0y-X_1y-Y_0x+Y_1x}$$

Aus der zweiten erhält man in analoger Weise

$$m = \frac{X_0Z_1-X_1Z_0+Z_1y-Z_0y}{X_0-X_1+Z_1x-Z_0x}$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werte wird m eliminiert. Die Elimination ergibt:

$$x^2+y^2-x\left(\frac{X_1-X_0+Y_0Z_1-Y_1Z_0}{Z_1-Z_0}\right)+y\left(\frac{Z_1X_0-Z_0X_1-Y_1+Y_0}{Z_1-Z_0}\right)$$
$$+\frac{Y_0X_1-X_0Y_1}{Z_1-Z_0}=0$$

Dieser Kreis stellt den Ort der Angriffspunkte der Pfeile dar, die der Raumgeraden g entsprechen. Es ist der sogenannte Basiskreis der Antiturbine, die g zugeordnet ist. Die Antiturbine ist, ganz entsprechend zu der Turbine in der Abbildung I, die Figur, gebildet aus ∞^1 Pfeilen, deren Angriffspunkte sämtlich auf dem erwähnten Basis- oder Grundkreis liegen. Mit einem bestimmten Grundkreis ist die Antiturbine noch nicht festgelegt, da zu jeder solchen eine ganz bestimmte Richtung der Pfeile, d. h. ein ganz bestimmtes m *gehört.*

Die Polare g' von g. Wir bestimmen jetzt die Polare g' von g in bezug auf den gefundenen linearen Komplex. g war

bestimmt durch die zwei Punkte P_1 und P_0. Der Schnitt der Polarebenen durch P_0 und P_1 liefert uns die Polare g'.

$$\text{Polarebene durch } P_0 : Z_0X - X_0Z - Y + Y_0 = 0$$

Setzt man für XYZ die transformierten Grössen ein, so bestimmt sich daraus m zu

$$m = \frac{Z_0y + x - Y_0}{Z_0x - X_0 - y}$$

Aus der Polarebene durch $P_1 : Z_1X - X_1Z - Y + Y_1 = 0$ erhält man

$$m = \frac{Z_1y + x - Y_1}{Z_1x - X_1 - y}$$

Die Elimination von m ergibt

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{X_1 - X_0 + Y_0Z_1 - Y_1Z_0}{Z_1 - Z_0}\right) + y\left(\frac{Z_1X_0 - Z_0X_1 - Y_1 + Y_0}{Z_1 - Z_0}\right) + \frac{Y_0X_1 - Y_1X_0}{Z_1 - Z_0} = 0$$

Das ist der Basiskreis der g' zugeordneten Antiturbine. g und g' besitzen also den nämlichen Grundkreis. Infolge der Eindeutigkeit der Abbildung kann g und g' nicht die gleiche Antiturbine entsprechen. Der Unterschied muss sich demnach in den m Koordinaten bemerkbar machen. In jedem Punkt des Basiskreises einer Antiturbine greifen zwei Pfeile an. Der eine stammt von einem Punkt von g, der andere von einem solchen der Polaren g'. Um das gegenseitige Verhältnis von g und g' vollständig zu kennen, müssen auch noch die Winkel bestimmt werden, die die den Punkten auf den Geraden g und g' entsprechenden Pfeile mit der x-Achse des Koordinatensystems bilden. Zu dieser Bestimmung wird, da die Rechnung in der allgemeinsten Form auf vermeidbare Schwierigkeiten stösst, eine gewisse Normierung des Problems vorgenommen. Zu diesem Zwecke muss zuerst gezeigt werden, dass eine Translation und eine Homothetie der Pfeilebene das Focalsystem in sich selbst transformieren, dass also diese zwei Transformationen in der Ebene « erlaubt » sind.

a) Translation.

Es sei $x = x' - a$; $y = y' - b$; $z = z'$. Dann wird

$$X = X' - Z'a + b;\ Y = Y' - Z'b - a;\ Z = Z'$$

Die Translation der Ebene ist, wie die Formeln zeigen, im Raume keine solche mehr. Analog ist

$$X_0 = X_0' - Z_0' a + b;\ Y_0 = Y_0' - Z_0' b - a;\ Z_0 = Z_0'$$

Eingesetzt in $Z_0X - X_0Z - (Y - Y_0) = 0$ ergibt

$$Z_0'X' - X_0'Z' - (Y' - Y_0') = 0$$

Die Translation transformiert das Focalsystem in sich selbst.

b) Homothetie.

Es sei $x = x';\ y = y';\ m = m'$ Als Folge davon ist

$$X = m'x' - y';\ Y = m'y' + x';\ Z = m = m'$$

Nach der Einsetzung lautet das transformierte Focalsystem

$$Z_0'X' - X_0'Z' - (Y - Y_0') = 0$$

Auch die Homothetie lässt das Focalsystem invariant. Diese Eigenschaften gestatten uns nun die geplante Normierung der Aufgabe.

Die Raumgerade g sei gegeben durch

$$g \begin{cases} Y = pX + q & I \\ Z = rX + s & II \end{cases}$$

Aus I bekommt man

$$my + x = p(mx - y) + q$$

Daraus ist $$m = \frac{-x - py + q}{y - px}$$

Aus II ist $$m = \frac{-ry + s}{1 - rx}$$

Die Elimination von m durch Gleichsetzung der beiden Werte ergibt:

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{1 + qr - sp}{r}\right) - y\left(\frac{p + s}{r}\right) = -\frac{q}{r}$$

Dies ist der Basiskreis der g entsprechenden Antiturbine.

Ihn wollen wir wie folgt transformieren:

I Translation, bis der Mittelpunkt in den Koordinatenursprung fällt.

II Homothetie, bis der Kreisradius = *1* ist.
Dies liefert die folgenden Beziehungen:

$$s = \sqrt{-(1+qr)} = \sqrt{q^2-1} \quad \text{wegen} \quad q = -r$$

$$p = -\sqrt{-(1+qr)} = -\sqrt{q^2-1}$$

Die Gleichung der Geraden, die unserem Kreise entspricht, lautet jetzt:

$$\begin{cases} Y = -\sqrt{q^2-1}\ X + q \\ Z = -qX + \sqrt{q^2-1} \end{cases}$$

q wird durch einen hyperbolischen Cosinus ersetzt, $q = cha$. Dann wird aus Y und Z

$$\begin{cases} Y = -sha\ X + cha \\ Z = -cha\ X + sha \end{cases}$$

Das ist nun die genau bestimmte Gerade, welche einer Anti-turbine zugeordnet ist, deren Basiskreis den Radius *eins* besitzt, und dessen Mittelpunkt in den Koordinatenursprung fällt.

Ihre Polare gewinnt man auf folgendem Wege:

Auf g wählen wir die zwei Punkte P_1 und P_2

$$P_1 \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = q \\ Z_1 = s \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} X_2 = \infty \\ Y_2 = \infty \\ Z_2 = \infty \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \frac{Y_2}{X_2} = p \\ \frac{Z_2}{X_2} = r \end{cases}$$

Die Focalebenen durch P_1 und P_2 lauten:

$$g' \begin{cases} Y = sX + q \\ Z = rX + p \end{cases}$$

Zusammen bestimmen sie die Polare g'. Verglichen mit der Gleichung von g haben einfach p und s ihre Stelle vertauscht.

g' als Raumgerade hat, analog wie g, allgemein die Form:

$$g' \begin{cases} Y = -sh\beta X + ch\beta \\ Z = -ch\beta X + sh\beta \end{cases}$$

g und g' stimmen aber, bis auf die Vertauschung von p und s, miteinander überein. Das bedingt, dass der Winkel β dem Betrage nach gleich α sei, genommen mit umgekehrtem Vorzeichen.

$$\beta = -\alpha$$

$$g' \begin{cases} Y = sh\alpha X + ch\alpha \\ Z = -ch\alpha X - sh\alpha \end{cases}$$

Die Ersetzung von α durch $(-\alpha)$ in g führt zu g'.

---

§ 4. Die Antiturbine.

Die Hüllkurve. Die ∞^1 Pfeilgeraden der Antiturbine besitzen eine Hüllkurve. Wir wollen sie ermitteln. Die Pfeilgleichung wird aufgestellt in der Form der Geraden durch einen Punkt mit bestimmter Richtung. Der feste Punkt wird der Angriffspunkt des Pfeiles sein, d. h. also ein Punkt des Basiskreises der Antiturbine. Wir müssen die allgemeinen Koordinaten eines solchen Kreispunktes in Funktion der Koordinate m, bzw. des Winkels θ (θ = Winkel eines Pfeiles mit der positiven x-Achse) bestimmen.

Gerade des Raumes: $\begin{cases} 1) & Y = -sh\alpha X + ch\alpha \\ 2) & Z = -ch\alpha X + sh\alpha \end{cases}$

Wir transformieren *1)* $\quad my + x = -(mx - y)sh\alpha + ch\alpha$

Daraus $\quad x = \dfrac{y(sh\alpha - m) + ch\alpha}{1 + msh\alpha}$

Aus *2)* folgt nach Transformation: $\quad y = \dfrac{m(1 + ch\alpha) - sh\alpha}{ch\alpha}$

Den Wert von y in die Gleichung für x eingesetzt, liefert

$$x = \frac{\sin\theta\, sh\alpha - \cos\theta}{ch\alpha}$$

Für y erhält man vollständig analog den Ausdruck

$$y = \frac{\sin\theta + sh\alpha\cos\theta}{ch\alpha}$$

Die Pfeilgerade $y - y_0 = m(x - x_0) = tg\,\theta\,(x - x_0)$ durch einen Punkt mit den obigen Koordinaten lautet:

$$y - \frac{1}{cha}(\sin\theta + sha\cos\theta) = tg\,\theta\left\{x - \frac{1}{cha}(\sin\theta\, sha - \cos\theta)\right\} = 0$$

$$y\cos\theta - x\sin\theta + \frac{1}{cha}\left\{sha\,(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta\right\} = 0$$

In der obigen allgemeinen Form ist die Elimination von θ nicht gut ausführbar. Wir setzen den Spezialfall $a = 0$ voraus. Dann heisst der Pfeil:

$$f(xy\,\theta):\ y\cos\theta - x\sin\theta - \sin(2\theta) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta\theta} \quad :\ y\sin\theta + x\cos\theta + 2\cos(2\theta) = 0$$

$f(xy\,\theta)$ wird mit $\cos\theta$ und $\frac{\vartheta f}{\vartheta\theta}$ mit $\sin\theta$ multipliziert.

Nach Addition der beiden Gleichungen erhält man

$$y - 2\sin^3\theta = 0$$

$$\sin\theta = \left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}$$

Auf gleichem Wege ergibt sich

$$\cos\theta = \left(\frac{-x}{2}\right)^{1/3} \quad \text{und daraus}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} \quad \text{oder} \quad 2^{2/3} = x^{2/3} + y^{2/3}$$

Die gesuchte Enveloppe ist eine Astroide.

Die Pfeile. In jedem Punkte der Basis greifen zwei Pfeile an. Der Bildpunkt des einen liegt auf einer Raumgeraden g, der andere auf der Polaren g'. Um uns über die gegenseitige Stellung der zwei Pfeile Rechenschaft geben zu können, bilden wir das Verhältnis der Koordinaten y und x der Basispunkte.

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta + sha\cos\theta}{\sin\theta\, sha - \cos\theta}$$

sha ist nach dem Vorausgegangenen eine Konstante. Setzen wir jetzt $sha = tg\beta$, so ist auch β notwendigerweise ein konstanter Winkel für die Antiturbine, deren Bildgerade *sha* einmal als konstanten Koeffizienten und dann auch als konstantes Glied

enthält. Wir haben somit, je nach der Wahl von β, mit einem Basiskreis unendlich viele Antiturbinen möglich. Wählt man das willkürliche β gleich α', so wird für

$$sh\alpha = tg\alpha' \quad \frac{y}{x} = tgw = \frac{tg\,\theta + tg\alpha'}{tg\,\theta\, tg\alpha' - 1} = -\,tg\,(\theta + \alpha') \quad \text{und}$$

$$w = -\,(\theta + \alpha')\,;\ \theta = -\,(w + \alpha')$$

w ist der Winkel, den der Radiusvektor vom Urspung nach dem Punkte $P(xy)$ der Basis mit der positiven x-Achse einschliesst. Der so gerichtete Pfeil stammt her von einem Punkte von g. Den zweiten im nämlichen Punkte $P(xy)$ angreifenden Pfeil erhält man aus der Polaren. Man legt durch die zwei Punkte P_1 und P_2 von g

$$P_1 \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = q \\ Z_1 = s \end{cases} \quad \text{und} \quad P_2 \begin{cases} X_2 = \infty \\ Y_2 = \infty \\ Z_2 = \infty \end{cases} \quad \text{mit} \begin{cases} \frac{Y}{X} = p \\ \frac{Z}{X} = r \end{cases} \quad \text{die Focalebenen}$$

$$g' \begin{cases} Y = sX + q \\ Z = rX + p \end{cases} \quad \text{was sich nach früherem auch schreiben lässt}$$

$$g' \begin{cases} Y = shaX + cha \\ Z = -\,chaX - sha \end{cases}$$

Die allgemeinen Koordinaten eines Basispunktes der Antiturbine, berechnet aus der Gleichung von g, ergeben unmittelbar die aus g' errechneten, wenn man in ihnen α durch $(-\alpha)$ ersetzt. Vorausgesetzt, dass θ^* der Winkel sei, den g' Pfeile mit der positiven x-Achse einschliessen, lauten x und y im Falle der Polaren:

$$x = -\frac{1}{cha}(sin\,\theta^*\, sha + cos\,\theta^*); \quad y = \frac{1}{cha}(sin\,\theta^* - sha\, cos\,\theta^*)$$

Der Quotient $\frac{y}{x}$ liefert mit $sh\alpha = tg\alpha'$

$$\frac{y}{x} = -\frac{tg\,\theta^* - tg\alpha'}{tg\,\theta^*\, tg\alpha' + 1} = tgw = -\,tg\,(\theta^* - \alpha') \quad \text{woraus}$$

$$\theta^* = -\,(w - \alpha') \quad \text{wird.}$$

Die Bedeutung jedes dieser Winkel ist bekannt, die Antiturbine ist vollständig bestimmt (siehe Fig. 3).

---

§ 5. Die Turbine.

Für die Turbine lassen sich die entsprechenden Elemente genau gleich gewinnen. Ihr entspricht die Raumgerade

$$\begin{cases} Y = aX + b \\ Z = cX + d \end{cases}$$

Darin bedeuten X, Y, Z nach der Abbildung Matasaru

$$X = y + mx;\ Y = x - my;\ Z = m;\ m = cotg\,\frac{\theta}{2}$$

θ ist der Winkel, den ein Pfeil der Turbine mit der positiven x-Achse bildet. Wenn man die Gleichung von g transformiert und die Grösse m aus den Gleichungen der beiden Projektionsebenen eliminiert, so erhält man als Basis den Kreis:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{1 + bc - ad}{c}\right)x + \left(\frac{d + a}{c}\right)y + \frac{b}{c} = 0$$

Die gleiche Normierung wie im Falle der Antiturbine gestattet die folgende Darstellung von g:

$$\begin{cases} Y = -\sqrt{b^2 - 1}\ X + b\,; \\ Z = -bX + \sqrt{b^2 - 1}\ ; \end{cases} \text{ oder für } b = ch\beta,\ \sqrt{b^2 - 1} = sh\beta \quad \begin{cases} Y = -sh\beta X + ch\beta \\ Z = -ch\beta X + sh\beta \end{cases}$$

Die Polare g' von g wird bestimmt durch die Focalebenen durch die zwei Punkte P_1 und P_2 von g

$$P_1 \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = b \\ Z_1 = d \end{cases} \text{ und } P_2 \begin{cases} X_2 = \infty \\ Y_2 = \infty \\ Z_2 = \infty \end{cases} \text{ mit } \begin{cases} \frac{Y_2}{X_2} = a \\ \frac{Z_2}{X_2} = c \end{cases}$$

Sie lautet:

$$g' \begin{cases} Y = sh\beta X + ch\beta \\ Z = -ch\beta X - sh\beta \end{cases}$$

β ist für ein und dieselbe Turbine konstant. In jedem Punkt der Basis greifen ein « g-Pfeil » und ein « g'-Pfeil » an. Auch hier ist analog

$$\beta \text{ von } (g) = -\beta \text{ von } (g')$$

Wird mit $\overline{\theta}$ der Winkel eines « g-Pfeiles » der Turbine mit der positiven x-Achse bezeichnet, so wird

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{ch\beta}(\sin\overline{\theta} + sh\beta\cos\overline{\theta})}{\frac{1}{ch\beta}(\sin\overline{\theta}\, sh\beta - \cos\overline{\theta})} = -\frac{\sin\overline{\theta} + sh\beta\cos\overline{\theta}}{\sin\overline{\theta}\, sh\beta - \cos\overline{\theta}}$$

für $sh\beta = tg\alpha'$ wird das Verhältnis

$$\frac{y}{x} = \frac{tg\overline{\theta} + tg\alpha'}{1 - tg\overline{\theta}\, tg\alpha'} = tg(\overline{\theta} + \alpha') = tgw \qquad \text{woraus folgt}$$

$$\overline{\theta} = w - \alpha'$$

w ist der Winkel zwischen der pos. x-Achse und dem Radiusvektor nach $P(xy)$.

Durch Wiederholung der Berechnung für die Polare erhält man, wenn $\overline{\theta}^* = \overline{\theta}$ der Pfeile der Polaren ist:

$$\frac{y}{x} = -\frac{tg\alpha' - tg\overline{\theta}^*}{tg\overline{\theta}^* tg\alpha' + 1} = tgw = tg(\overline{\theta}^* - \alpha') \qquad \text{was}$$

$$\overline{\theta}^* = w + \alpha' \quad \text{ergibt.}$$

Damit ist auch die Turbine vollständig bestimmt. (Fig. 3.)

---

§ 6. Antiturbine und Turbine.

Die nachfolgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung der bisherigen Resultate. Aus ihr geht die vollkommene Symmetrie der Antiturbine und der Turbine in bezug auf die x-Richtung deutlich hervor. Die Uebereinstimmung in der Bezeichnung der Winkel, die zu w zu- oder abzuzählen sind, ist natürlich nur eine zufällige. Da aber α' sowohl für die Turbine als auch für die Antiturbine eine willkürliche Konstante darstellt, so kann sie stets herbeigeführt werden.

Die nachstehende Figur veranschaulicht die Symmetrie der Turbine und der Antiturbine in bezug auf die x-Richtung. Sie enthält alles, was in der Tabelle über die Richtung der Pfeile zusammengestellt ist.

Antiturbine	**Turbine**
Bildgerade:	Bildgerade:
$Y = pX + q;\ Y = -shaX + cha$ $Z = rX + s;\ Z = -chaX + sha$	$Y = aX + b;\ Y = -sh\beta X + ch\beta$ $Z = cX + d;\ Z = -ch\beta X + sh\beta$
Polare:	Polare:
$Y = -sX + q;\ Y = -shaX + cha$ $Z = rX - p;\ Z = -chaX + sha$	$Y = dX + b;\ Y = sh\beta X + ch\beta$ $Z = cX + a;\ Z = -ch\beta X - sh\beta$

Richtung des „g-Pfeiles“ in P (xy)

$\frac{y}{x} = tgw = -tg(\theta + \alpha')$ $\theta = -w - \alpha'$	$\frac{y}{x} = tgw = tg(\overline{\theta} + \alpha')$ $\overline{\theta} = w - \alpha'$

Richtung des „g'-Pfeiles“ in P (xy)

$\frac{y}{x} = tgw = -tg(\theta^* - \alpha')$ $\theta^* = -w + \alpha'$	$\frac{y}{x} = tgw = tg(\overline{\theta}^* - \alpha')$ $\overline{\theta}^* = w + \alpha'$

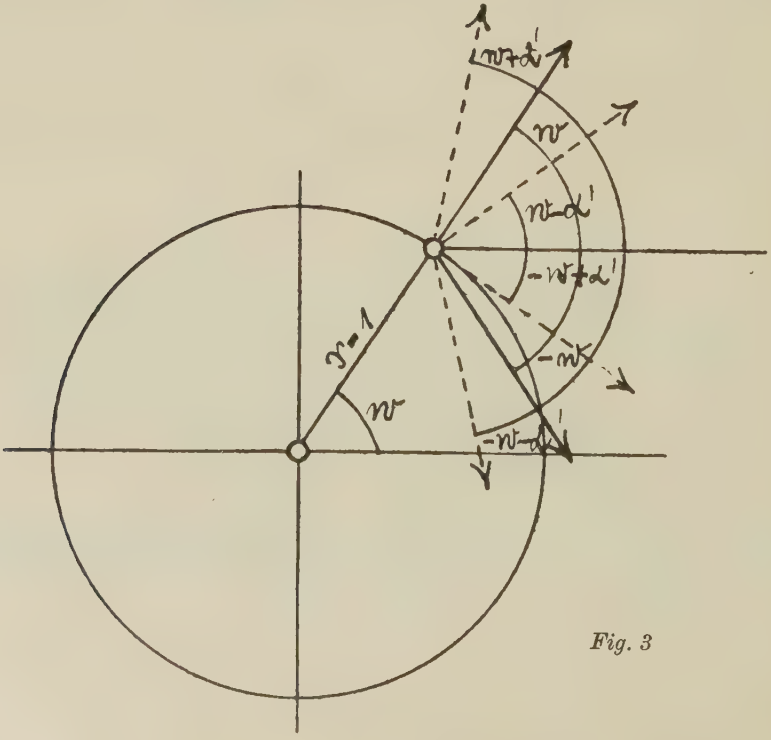

Fig. 3

§ 7. Turbinoid und Antiturbinoid.

Durch die Formeln

$$\text{I}\begin{cases} Z = m \\ Y = x - my \\ X = y + mx \end{cases} \quad \text{und II} \begin{cases} Z^* = m \\ Y^* = my + x \\ X^* = mx - y \end{cases} \quad \text{werden}$$

einem Pfeile zwei Punkte P und P^* zugeordnet. Die Formelgruppe I liefert P, Gruppe II dagegen P^*. Der Pfeil, dessen Bildpunkt durch I bestimmt ist, liegt im Turbinoid, der durch II festgelegte im Antiturbinoid. Durch die Abbildung II geht die Gesamtheit der zu einem festen Pfeil f_0 inversen Pfeile über in die Punkte der Ebene:

$$Z_0{}^*X^* - X_0{}^*Z^* - (Y^* - Y_0{}^*) = 0$$

Mit variabeln $X_0{}^*Y_0{}^*Z_0{}^*$ bekommen wir das schon erwähnte Focalsystem. Mit den folgenden Beziehungen II'

$$\text{II}'\begin{cases} -\ Z^* = m \\ \quad Y^* = my + x \\ -\ X^* = mx - y \end{cases}$$

gelangt man zum nämlichen Focalsystem wie oben. Je nach besserer Eignung werden von nun an die Formeln II oder II' verwendet. Der genaue Vergleich von I, II und II' klärt das gegenseitige Verhältnis von Turbinoid und Antiturbinoid auf. Werden in II die folgenden Ersetzungen gemacht:

$$x \text{ durch } x,\ y \text{ durch } (-y),\ m \text{ durch } m,$$

so ergeben sich aus $Z^*Y^*X^*$ die Werte:

$$\begin{cases} Z^{**} = m = Z^* \\ Y^{**} = x - my \\ X^{**} = mx + y \end{cases}$$

Der durch dieselben bestimmte Punkt $P(X^{**}Y^{**}Z^{**})$ ist das Bild des Pfeiles $f^* = f(x, -y, m)$. Die obigen Formeln sind aber nichts anderes als die Formeln I für den Pfeil $f(xym)$. Es ist demnach:

$$II(x, -y, m) = I(x, y, m) \text{ oder } II \text{ von } (f^*) = I \text{ von } (f)$$

II von $f*$ liefert aber das Antiturbinoid und I von f das Turbinoid. Deshalb besagen diese Beziehungen, dass man zu einem

Pfeil des Antiturbinoides gelangt, indem man den Pfeil des Turbinoides ersetzt durch denjenigen, der im in bezug auf die x-Achse symmetrischen Punkt und mit gleichem m angreift.

Die Symmetrie der Pfeilfiguren in bezug auf die x-Richtung ergibt sich auch aus I und II'. II' lautet:

$$II' \quad \begin{cases} -Z^* = m \\ Y^* = x + my \\ -X^* = mx - y \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{und nach Ersetzung} \\ \text{von } m \text{ durch } (-m) \end{matrix} \quad \begin{cases} Z^{**} = m \\ Y^{**} = x - my \\ X^{**} = y + mx \end{cases}$$

Die letzte Gruppe bezeichnen wir mit $II'\ (x, y, -m)$.

Es ist sofort ersichtlich, dass

$$II'(x, y, -m) = I(xym) \text{ oder } II'(f^{**}) = I(f)$$

wenn $f(x, y, -m)$ mit f^{**} bezeichnet wird.

Darin liegt ausgedrückt, dass die Pfeile des Turbinoides übergehen in diejenigen des Antiturbinoides, wenn man in ihnen m durch $(-m)$ ersetzt.

Bemerkung. Die Figuren des Turbinoides und des Antiturbinoides bekommt man, indem man nur die Ebene des Bildraumes interpretiert. Eine nicht weniger interessante Figur würde sicher in der Pfeilebene entstehen, wenn man zum Beispiel eine Regelfläche des zweiten Grades behandeln würde.

II. KAPITEL.

§ 1. Die Verwandschaft P ⟶ P*

Durch die Transformationsformeln der Abbildung I

$$\left.\begin{matrix} X = y + mx \\ Y = x - my \\ Z = m \end{matrix}\right\} \text{ wird einem Pfeil } f(xym) \text{ ein und nur ein Punkt } P(XYZ) \text{ zugeordnet.}$$

Die Abbildung II

$$\left.\begin{matrix} X = mx - y \\ Y = my + x \\ Z = m \end{matrix}\right\} \text{ ordnet demselben Pfeil } f(xym) \text{ einen andern Punkt } P^*(X^*Y^*Z^*) \text{ zu.}$$

Die Art der Verwandtschaft $P \longrightarrow P^*$, d. h. die Beziehung zwischen XYZ und X^*Y^* und Z^* soll untersucht werden.

Aus: $\left.\begin{aligned} X &= y + mx \\ Y &= x - my \end{aligned}\right\}$ ergibt sich $x = \dfrac{mX+Y}{1+m^2}$

Aus denselben bestimmt sich: $y = \dfrac{X - mY}{1+m^2}$

Aus II erhält man für x und y die Werte

$$x = \frac{mX^*+Y^*}{1+m^2}$$

$$y = -\frac{X^* - mY^*}{1+m^2}$$

Die beiden Raumpunkte sind die Bilder ein und desselben Pfeiles. Die beiden Ausdrücke für x sind gleich und ebenso die für y. Die Gleichsetzung der beiden x- und y-Werte hat ihre Elimination zur Folge. Sie liefert:

$$X = \frac{Z^{*2}X^* - X^* + 2Z^*Y^*}{1+Z^{*2}} = \frac{X^*(Z^{*2}-1)+2Z^*Y^*}{1+Z^{*2}}$$

$$Y = \frac{-Z^{*2}Y^* + Y^* + 2Z^*X^*}{1+Z^{*2}} = \frac{Y^*(1-Z^{*2})+2Z^*X^*}{1+Z^{*2}}$$

$$Z = Z^* = \frac{Z^*(1+Z^{*2})}{(1+Z^{*2})}$$

Die Verwandtschaft zwischen P und P^* ergibt den gefundenen Beziehungen zufolge eine birationale kubische Transformation.

---

§ 2. Eigenschaften der Transformation.

Beispielsweise transformiert sich die Ebene

$$aX + bY + cZ + d = 0 \quad \text{in}$$

$$cZ^{*3} + aZ^{*2}X^* - bZ^{*2}Y + 2aZ^*Y^* + 2bZ^*X^* + dZ^{*2} - aX^* + bY^* + cZ^* + d = 0$$

d. h. in eine Fläche dritter Ordnung.

Eine beliebige Gerade wird entsprechend eine Raumkurve dritter Ordnung liefern. Zuerst betrachten wir, weil besonders einfach, die Transformation einer horizontalen Geraden. Es ist dann $Z^* = konstant$. In diesem Falle lauten unsere Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} X &= aX^* + bY^* \\ Y &= a'X^* + b'Y^* \\ Z &= Z^* \end{aligned}\right\}$$

Dies stellt eine Affinität dar. Eine solche ändert weder Ordnung noch Klasse, d. h. eine Gerade der Horizontalebene transformiert sich in eine Gerade dieser Ebene.

Die Horizontalgerade $\begin{cases} Z = k \\ AX + BY + CZ + d = 0 \end{cases}$ geht über in

$$\begin{cases} Z = k \\ A'X^* + B'Y^* + C'Z^* + d = 0 \end{cases}$$

Die Ebene: $aX + bY + cZ + d = 0$ geht über in die F_3:

$$cZ^{*3} + Z^{*2}(aX^* - bY^* + d) + 2Z^*(aY^* + bX^* + \frac{c}{2}) + bY^* - aX^* + cZ^* + d = 0$$

Jede Horizontalebene schneidet aus der F_3 eine Gerade. Die F_3 ist also speziell eine geradlinige Fläche dritter Ordnung. Jede parallele Ebene zur Grundebene muss aber noch zwei weitere Geraden der F_3 enthalten. Da alle Schnittebenen $Z^* = k$, als parallele Ebenen zur Grundebene die unendlich ferne Gerade w enthalten, so muss w eine Doppelgerade unserer F_3 sein.

Schneidet man weiter die F_3 mit der unendlich fernen Ebene $\curvearrowright$, so muss auch $\curvearrowright$ die drei erwähnten Schnittgeraden enthalten.

$cZ^{*3} + Z^{*2}(aX^* - bY^*) = 0$ oder
$Z^{*2}(cZ^* + aX^* - bY^*) = 0$ liefert die drei

Schnittgeraden. $Z^{*2} = 0$ ergibt w der Grundebene als Doppelelement.

$aX^* - bY^* + cZ^* = 0$ enthält und bestimmt die dritte unendlich ferne Gerade.

Transformation einer beliebigen Geraden des R_3.

Gerade: $\begin{cases} Y = pX + q \\ Z = rX + s \end{cases}$

Nach der Transformation lauten die Gleichungen:

$$Y^*(1 - Z^{*2} - 2pZ^*) + X^*\left\{2Z^* - p(Z^{*2} - 1)\right\} = q(1+Z^{*2})$$
$$Y^*2rZ^* \qquad + X^*r(Z^{*2} - 1) \qquad = (1+Z^*)(Z^* - s)$$

Daraus lassen sich X^*, Y^* berechnen in Funktion von Z^*. Man erhält:

$$X^* = \frac{(1 - Z^{*2} - 2pZ^*)(Z^* - s) + 2qrZ^*}{-r(Z^{*2}+1)}$$

$$Y^* = \frac{(Z^{*2} - 1)\left\{qr + p(Z^* - s)\right\} - 2Z^*(Z^* - s)}{-r(Z^{*2}+1)}$$

und Z^* lässt sich darstellen

$$Z^* = \frac{-Z^*(Z^{*2}+1)r}{-r(Z^{*2}+1)}$$

Das ist die parametrische Darstellung der Raumkurve dritter Ordnung, in die die beliebige Raumgerade übergeht.

Die Ebene: $AX^* + BY^* + CZ^* + D = 0$ liefert nach Einsetzung der Werte von $X^*Y^*Z^*$

$$A\left\{(1 - Z^{*2} - 2pZ^*)(Z^* - s) + 2qrZ^*\right\} + B\left\{(Z^{*2} - 1)qr + p(Z^* - s)\right.$$
$$\left. - 2Z^*(Z^* - s)\right\} + C\left\{Z^* - r(Z^{*2}+1)\right\} + D\left\{-r(Z^{*2}+1)\right\} = 0$$

Die drei Lösungen für Z^* bestimmen die drei Schnittpunkte der R_3 mit der Ebene. Deshalb handelt es sich um eine R_3.

Grundparaboloid und Grundebene.

Vorerst ist an Hand der Formeln *II* etwas zu gewinnen. Früher wurde in denselben y durch $-y$ ersetzt, was auf $II(f^*)$ führte. Soll nun $f(xym)$ durch die Ersetzung von y durch $(-y)$ in sich selbst transformiert werden, so muss notwendigerweise $y = o$ gemacht werden. Für $y = o$ wird aber aus *II*

$$\left.\begin{aligned} X &= mx \\ Y &= x \\ Z &= m \end{aligned}\right\}$$ und als Folge davon $X = YZ$ oder $X - YZ = 0$.

Aus den Transformationsformeln geht hervor, dass dieses hyperbolische Paraboloid durch unsere Transformation Punkt für Punkt in sich selbst transformiert wird. Transformiert man das Paraboloid, so erweist eine kleine Rechnung, dass:

$$X - YZ = \frac{-X^*(1+Z^{*2})+Z^*Y^*(1+Z^{*2})}{1+Z^{*2}} = -(X^* - Y^*Z^*)$$

Die Formeln II' zeigen etwas anderes. In ihnen hat man m durch $(-m)$ ersetzt. Bei dieser Ersetzung bleibt der Pfeil nur dann invariant, wenn $m = o$ ist. $m = o$ verlangt $\theta = \pi$. Der Pfeil, der mit der positiven x-Achse einen Winkel $\theta = 180^0$ einschliesst, geht bei Ersetzung von m durch $(-m)$ in sich selbst über. Für $m = o$ ist aber $Z = o$. Es müssen also, wenn bei Vertauschung von m durch $(-m)$ Pfeile wieder in sich selbst transformiert werden, was für $m = o$ geschieht, die entsprechenden Bildpunkte, für die $Z = o$ ist, also die Punkte der Grundebene des räumlichen Koordinatensystems in sich selbst transformiert werden. Das ergeben die Transformationsformeln sofort. Für $Z = o$ lauten die Beziehungen unter II':

$$Z^* = o;\ X = X^*;\ Y = Y^*$$

Jeder Punkt der Grundebene bleibt bei Anwendung von II' in Ruhe. Ein Pfeil mit $\theta = o$ liefert $Z = \infty$. Bei der Transformation bleibt auch allgemein das Unendliche im Unendlichen.

Singularitäten der Transformation.

Die unendlich ferne Gerade w der Grundebene OXY hat sich als eine Singularität erwiesen. Eine Gerade transformiert sich nämlich im allgemeinen in eine R_3. Transformieren wir aber eine Gerade, welche w trifft, d. h. eine Horizontalgerade, so besteht das transformierte Gebilde aus einer horizontalen Geraden und nicht aus einer Raumkurve dritter Ordnung. w selbst soll das Fehlende ersetzen und, doppelt gezählt, mit der transformierten Geraden uns wieder eine R_3 liefern. Auch die Tatsache, dass die transformierte F_3, w notwendigerweise enthalten muss, weist auf die Singularität von w hin. Wir zeigen vorerst folgendes: Jedem Punkt von w entsprechen alle Punkte dieser Geraden. Zuerst muss aber klar gemacht werden, welchen Pfeilen ein unendlich ferner Punkt entspricht. Wir haben dabei die drei möglichen Fälle:

a) $X = \infty;\ Y = \infty;\ Z =$ *endlich und beliebig.*

Dieser Punkt liegt auf w und ist bestimmt durch die Angabe des Verhältnisses $\frac{Y}{X}$. Setzen wir es $= k = konstant$. Das bedeutet in der Pfeilebene $\frac{my+x}{mx-y}$ ist gegeben.

Nach den gemachten Annahmen kann m nicht unendlich sein. Hingegen müssen x und y unendlich gross werden. Das liefert

$$limes \frac{Y}{X} = limes \frac{m+\frac{x}{y}}{\frac{mx}{y}-1} = \frac{1}{cotg\,(\frac{\theta}{2}+w)} = tg\,(\frac{\theta}{2}+w)$$

$tg(\frac{\theta}{2}+w)$ ist mit $\frac{Y}{X}$ gegeben und bekannt. Der Pfeil selber behält auf dem Wege ins Unendliche die Richtung θ. w und θ sind aber nicht völlig bestimmt. Man hat bloss dafür zu sorgen, dass $(w+\frac{\theta}{2})$ konstant ist. Mit dieser Annahme bekommen wir einen einzigen Bildpunkt auf w. Die Abbildung *Pfeil* $\longrightarrow$ *Punkt* ist somit für die Grenzelemente, die wir eben betrachtet haben, nicht mehr eindeutig. Es ist nicht überraschend, wenn w als Folge davon eine Singularität der Transformation darstellt.

b) $\left.\begin{array}{l} X = a \\ Y = b \\ Z = \infty \end{array}\right\}$ Es sind dann $\begin{array}{r} mx - y = a \\ x + my = b \\ m = \infty \end{array}$

x und y müssen gleich null sein. Das ergibt den einzigen Pfeil mit dem Angriffspunkt im Nullpunkt, mit der Richtung der positiven x-Achse, weil für $m = \infty$ der Winkel $\theta = 0$ wird.

c) $\left.\begin{array}{lll} X = mx - y & = \infty \\ Y = x + my & = \infty \\ Z = m & = \infty \end{array}\right\}$ Die Verhältnisse $\frac{X}{Z}$ und $\frac{Y}{Z}$ müssen bestimmte Werte ergeben, d. h.

$$\frac{X}{Z} = \frac{mx-y}{m} = x \quad \text{für } m = \infty$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{x+my}{m} = y \quad \text{für } m = \infty$$

Wie unter *b)* ergibt sich zu jedem unendlich fernen Punkt ein ganz bestimmter Pfeil mit bestimmtem Angriffspunkt und zur positiven x-Achse paralleler Richtung. Gestützt auf die Diskussion der drei Fälle ist es leicht zu zeigen, dass jedem Punkt von w jeder Punkt dieser Geraden zugeordnet ist.

Nach den Transformationsformeln *II* ist:

$$\frac{Y}{X} = \frac{Y^*(1 - Z^{*2}) + 2\,Z^*X^*}{X^*(Z^{*2} - 1) + 2\,Z^*Y^*}$$

Dividiert man oben und unten durch X^* und setzt das konstante Verhältnis $\frac{Y^*}{X^*} = k^*$, so heisst der Ausdruck:

$$\frac{Y}{X} = \frac{k^*(1 - Z^{*2}) + 2\,Z^*}{Z^{*2} - 1 + 2\,Z^*k^*} = \frac{k^* + \frac{2\,Z^*}{1 - Z^{*2}}}{-\left(1 - k^*\frac{2\,Z^*}{1 - Z^{*2}}\right)}$$

k^* kann einer willkürlichen Grösse $tg\alpha^*$ gleich gesetzt werden. Wegen $\frac{2Z^*}{1 - Z^{*2}} = tg\,\theta^*$ ist schliesslich

$$\frac{Y}{X} = -\,tg\,(\alpha^* + \theta^*) = tg\gamma$$

Bei dieser Gleichsetzung muss $\alpha^* + \theta^* = \pi - \gamma$ sein, oder

$$\gamma = \pi - (\alpha^* + \theta^*)$$

Für einen Punkt E^* $\begin{cases} X^* = \infty \\ Y^* = \infty \\ \frac{Y^*}{X^*} = k^* \end{cases}$ der unendlich fernen Geraden, dessen Richtung also durch $\frac{Y^*}{X^*} = k^*$ festgelegt ist, kann Z^* vollkommen beliebig gewählt werden. Man bekommt immer den nämlichen Punkt E^*. Mit Z^* beliebig ist ohne weiteres auch θ^* beliebig. Dann ist nach $\gamma = \pi - (\alpha^* + \theta^*)$, γ ebenfalls frei wählbar. γ bestimmt aber die Lage von E. Zu einem E^* erhält man als Entsprechende beliebige Punkte E von w. Damit ist gezeigt, was wir behauptet haben. Ohne grosse Abweichung bekäme man das gleiche auch aus den Formeln *II'*.

Die Behandlung des vorausgegangenen Falles *b)* ergab, dass der unendlich ferne Punkt der Z-Achse kein singulärer Punkt

der Transformation ist, da ihm der einzige Pfeil mit Angriffspunkt im Nullpunkt und mit der Richtung der positiven x-Achse entspricht. Man kann die Stellung, die dieser Punkt innerhalb der Transformation einnimmt, auch auf einem andern Wege untersuchen. Wir betrachten das Verhalten einer Parallelen zur Z-Achse. Transformiert sie sich in eine R_3, so stellt das den regulären Fall dar. Liefert ihre Transformation etwas anderes, so würde das auf eine Singularität hinweisen. Dieser Fall lässt sich nun aber nicht entscheiden auf Grund der schon behandelten Transformation einer beliebigen Geraden. Denn für die Parallele zur Z-Achse werden die Grössen r, die im Nenner der allgemeinen Geradentransformation vorkommen, gleich null. Es wird dann alles unbestimmt. Für unsere Parallele zur Z-Achse haben wir:

$$\left.\begin{aligned} X &= c \\ Y &= d \end{aligned}\right\}$$

Nach der Transformation heisst sie

$$X = \frac{X^*(Z^{*2}-1)+2Z^*Y^*}{1+Z^{*2}} = c; \quad Y = \frac{Y^*(1-Z^{*2})+2Z^*X^*}{1+Z^{*2}} = d$$

$$\left\{\begin{aligned} X^*(Z^{*2}-1)+2Z^*Y^* &= c(1+Z^{*2}) \\ Y^*(1-Z^{*2})+2Z^*X^* &= d(1+Z^{*2}) \end{aligned}\right.$$

Aus den zwei Beziehungen erhält man:

$$Y^* = -\frac{d(Z^{*2}-1)-2cZ^*}{Z^{*2}+1} \qquad X^* = \frac{c(Z^{*2}-1)+2dZ^*}{Z^{*2}+1}$$

Werden diese Werte in die Ebenengleichung $AX^*+BY^*+CZ^*+D=0$ eingesetzt, so ergibt sich daraus wegen $Z^* = \frac{Z^*(Z^{*2}+1)}{Z^{*2}+1}$ eine Beziehung dritten Grades in Z^*. Das transformierte Gebilde liefert demnach drei Schnittpunkte mit der gewählten Ebene, ist also eine R_3. Als Folge davon ist der unendlich ferne Punkt der Z-Achse auch keine singuläre Stelle.

---

§ 3. Weitere Untersuchung der Transformation.

Wir müssen die Transformation $P \longrightarrow P^*$ noch weiter untersuchen. Wir erinnern daran, dass uns w, die unendlich ferne Gerade der Grundebene bei der Transformation von Horizontal-

geraden in Horizontalgeraden als Singularität entgegengetreten ist. Die Rolle, die w spielt, muss eingehend verfolgt werden, und zwar nach folgendem Schema und unter Voraussetzung des Falles *II'*.

a) Ermittlung des Grades der Transformierten einer *allgemeinen* C_n.

a') Bestimmung der Anzahl der eventuellen Treffpunkte dieser Transformierten C'_x mit w.

a'') Untersuchung des Einflusses der Singularität der Transformation auf die Transformierte für den Fall, dass die C_n nicht mehr als ganz allgemein vorausgesetzt wird, sondern mit schon vorhandenen Schnittpunkten mit w gedacht.

b) Ermittlung der Ordnung der transformierten Fläche F'_x einer allgemeinen F_n.

b') Welcher Art ist die Singularität, die w bei der Transformierten bildet?

b'') Analog wie unter *a''* soll, um die Wirkung der Singularität noch besser erkennen zu können, auch hier angenommen werden, dass die zu transformierende F_n die unendlich ferne Gerade w schon einfach oder mehrfach enthält.

Zu *a*: Wir wollen den Grad der Transformierten bestimmen. Es sei C_n die zu Transformierende. Wir schneiden C_n mit einer der Flächen dritten Grades, welche wir als Transformierte der Ebene erhalten haben. Die Anzahl der Schnittpunkte ist natürlich $3n$. Nun wird die Figur transformiert. Die C_n geht über in eine C_x', und aus der F_3 wird rückwärts eine Ebene. Die Anzahl der Schnittpunkte ist nach der Transformation gleich x. Da sie aber notwendigerweise mit der Anzahl vor der Transformation übereinstimmen muss, so ist $x = 3n$

Die Transformierte ist also eine C_{3n}.

$$\left.\begin{matrix} C_n \\ F_3 \end{matrix}\right\} = 3n \text{ Schnittpunkte} \longrightarrow \left.\begin{matrix} C'_x \\ F_1 \end{matrix}\right\} = x \text{ Schnittpunkte}, \quad x = 3n$$

vor der Transformation — nach der Transformation

Zu *b*: Es sei F_n die zu transformierende Fläche und R_3 eine der Kurven dritten Grades, die wir als Transformierte von einer Geraden erhalten haben. Die Anzahl der Schnittpunkte ist $3n$. Nun wird neuerdings transformiert. Aus der F_n wird eine F'_y und aus der R_3 wird eine Gerade g. Es sind natürlich vor und nach der Transformation wieder gleich viel Schnittpunkte vorhanden. Infolgedessen kann y nur gleich $3n$ sein.

Vor der Transformation: Nach der Transformation:

$$\left.\begin{matrix} F_n \\ R_3 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{3n \text{ Schnittpunkte}} \left.\begin{matrix} F_y' \\ g_1 \end{matrix}\right\} \; y = 3n$$

Erstes Resultat. Durch die Transformation wird im allgemeinen die Ordnung einer Kurve oder einer Fläche mit *3* multipliziert. Es ist also eine *kubische Transformation.*

Zu *b*: Die Anzahl der Schnittpunkte einer transformierten C_n mit der unendlich fernen Geraden ist *2n*. Denn nach den Formeln *II'*, die wir unsern Ueberlegungen zugrunde legen, transformiert sich jeder Punkt der Grundebene in sich selbst. Es können also nach der Transformation nicht mehr als *n* Schnittpunkte im Endlichen liegen. Da aber doch *3n* Schnittpunkte existieren müssen, so liegen die übrigen *2n* im Unendlichen, d. h. auf *w*. Die Grundebene liesse sich ohne weiteres durch eine parallele Ebene ersetzen, ohne dass wesentliche Unterschiede sich bemerkbar machten. Ausgeschlossen sind davon nur die Parallelebenen $Z = \pm i$, wie später gezeigt wird.

Zu *a'*: Nun wird angenommen, die zu transformierende C_n schneidet *w* schon in *p* Punkten. Wir wollen auch in diesem Fall den Grad der Transformierten C'_x ermitteln. Mit C_n transformieren wir eine F_3, wie wir sie als Transformierte einer Ebene bekommen. Die Anzahl der Schnittpunkte von C_n mit F_3 ist *2p*. Dann transformieren wir. Aus F_3 wird eine Ebene und aus C_n eine C'_x. Die Anzahl der Schnittpunkte ist nach der Transformation $3n - 2p =$ Ordnung der Transformierten.

Zu *b'*: Analog wird angenommen, die F_n enthalte *w p*-mal. Wir bestimmen die Schnittfigur mit einer F_3. Die Schnittfigur muss eine im Endlichen liegende C_{3n-2p} sein. Wir transformieren wieder. Die übrige Schnittkurve liefert den Schnitt mit der Ebene und ist von der Ordnung $3n - 2p$.

Bemerkung. Will man diese letzten allgemeinen Resultate auf die R_3 und die F_3 anwenden, die wir kennen als Transformierte von Gerade und Ebene, so stimmen sie nicht mehr. Hier wäre $p = 2$ und $x = 3n - 2p = 9 - 4 = 5$. Die Transformierte wäre somit eine C_5 und nicht eine Gerade. Das zeigt uns, dass der Zusammenhang einer C_5 mit *w* noch enger sein muss als « *ein bloss in zwei Punkten treffen* ». So etwas muss auch der Fall sein für jede Transformierte. Für eine solche Transformation muss jeder Schnittpunkt mit *w* die Ordnung der Transformierten nicht nur um zwei, wie allgemein erkannt, sondern um vier vermindern. Dann haben wir für die Transformierte der Transformierten $n' = 9n - 4 \,.\, 2n$ *oder* $n' = n$, wie es sein muss. Analoges hat man für die Flächen, wo man genau die gleichen Zahlen erhält.

Wie schon bemerkt, gelten diese Resultate für die Transformation *II'*. Für die Transformation *II* würde man ganz ähnliche Resultate bekommen. Das zeigen wir beispielsweise im Falle *b,* wo wir von der Grundebene sprechen. Es soll gezeigt werden, dass die Transformierte C_{3n}, w auch hier in $2n$ Punkten schneidet. Betrachten wir nämlich die Schnittpunkte von C_{3n} mit dem Paraboloid, dessen Punkte nicht transformiert werden. Vor der Transformation haben wir deren $2n$. Nach der Transformation sind es $6n$. Im Unendlichen müssen also $6n - 2n = 4n$ Schnittpunkte liegen, in diesem Falle also $4n$ Schnittpunkte mit dem Paraboloid. $4n$ Schnittpunkte müssen im Unendlichen verschwinden. Diese $4n$ Schnittpunkte mit dem Paraboloid liefern aber nicht $4n$ Treffpunkte mit w, sondern nur $2n$, wie man gleich erkennen kann, wenn auch eine horizontale Ebene mittransformiert wird. *Jede transformierte Kurve muss also in jedem Treffpunkt mit w dieses Paraboloid berühren.*

---

§ 4. Die Rolle der Ebenen $Z = \pm i$.

Wir haben die Beziehungen:

$$P \leftarrow \begin{cases} X = \dfrac{X^*(Z^{*2}-1)+2Z^*Y^*}{1+Z^{*2}} \\ Y = \dfrac{Y^*(1-Z^{*2})+2Z^*X^*}{1+Z^{*2}} \end{cases} \rightarrow P^*$$

X und Y werden unendlich gross, wenn $1+Z^{*2}=0$, d. h. für $Z^* = \pm i$. Um die Lage des Punktes $P(XYZ)$ in diesem Falle zu bestimmen, bilden wir das Verhältnis der Koordinaten Y und X.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Y}{X} = \dfrac{k^* + \dfrac{2i}{2}}{-(1 - k^*\dfrac{2i}{2})} = \dfrac{k^*+i}{k^*i-1} = \dfrac{k^*+i}{i\,(k^* - \dfrac{1}{i})} = \dfrac{k^*+i}{k^*+1} \cdot \dfrac{1}{i} = -i \\ \text{für } Z = \mp i \end{array} \right.$$

Es ist für $Z = +i$ $\qquad \dfrac{Y}{X} = -i$

Analog für $Z = -i$ $\qquad \dfrac{Y}{X} = +i$

Man sieht also, dass zu jedem Punkt der Ebene $Z = +i$ der eine Kreispunkt der Grundebene entsprechen muss und analog zu

$Z = -i$ der andere. So bekommen wir schliesslich als singuläre Figur der Transformation das folgende:

I. Die singuläre Figur besteht aus der unendlich fernen Geraden w, aus den zwei zyklischen Punkten auf w und aus den zwei Ebenen $Z = \pm i$ durch w. Jedem Punkt der einen Ebene entspricht der eine singuläre Punkt auf w.

II. Jedem Punkt auf w entspricht jeder Punkt auf w.

Bemerkung. Diese Transformation hat uns eine Ebene in die wohlbekannte Regelfläche dritter Ordnung transformiert. Es wäre ein leichtes, mit Hilfe der Transformation beliebig viele andere Regelflächen zu bekommen, die w als singuläre Gerade beliebiger Ordnung enthalten.

III. KAPITEL.

Über die Liesche Transformation in einem hyperbolischen Raume.

§ 1. Die stereographische Projektion.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Beziehung, die zwischen inversen Pfeilen der Ebene besteht, zu der sogenannten Lieschen Transformation von Geraden in Kugeln in einem hyperbolischen, nicht-euklidischen Raume führen kann. Dazu ist notwendig, die Pfeilgeometrie auf einer reellen Kugel zu untersuchen. Zu dieser Geometrie gelangt man vermittelst der stereographischen Projektion. Indem die Pfeilebene stereographisch auf die Kugel projiziert wird, erhält man zu jeder Figur der Ebene die entsprechende der Kugel in vollständig eindeutiger Zuordnung. Die in der Ebene entwickelte Theorie lässt sich ohne Schwierigkeit auf die Kugel übertragen. Wir werden einige einander entsprechende Figuren besprechen.

Der Pfeil. Auf der Kugel müssen die Pfeile als gerichtete Kreise mit einem fest gewählten Anfangspunkt definiert werden. Diese Kreise lassen sich ersetzen durch die in ihrer Ebene liegenden, im festen Punkt angreifenden, orientierten Kugeltangenten. Steigen wir jetzt rückwärts von der Kugel in die Ebene hinunter, so wird aus der gerichteten Kugeltangente eine in einem bestimmten Punkte angreifende Richtung der Ebene, d. h. ein Pfeil der Ebene.

Die inverse Lage zweier Pfeile. In der Ebene ist die inverse Lage von zwei Pfeilen die Grundbeziehung, aus der sich das

Wesentliche der Pfeilgeometrie ergibt. Es sollte nun auch diese wichtige Lagebeziehung auf der Kugel interpretiert werden. Zwei Pfeile f und f' sind invers, wenn die Verbindungsgerade m ihrer Angriffspunkte senkrecht steht auf der Winkelhalbierenden m' der zwei Geraden, auf denen unsere Pfeile liegen. Projizieren wir stereographisch. Der Pfeil f liefert einen Kugelpfeil, den wir mit F bezeichnen. Ferner sei F' die Projektion von f'. Es sind demnach $f \longrightarrow F$ und $f' \longrightarrow F'$ entsprechende Stücke der Abbildung Ebene $\longrightarrow$ Kugel. Wir fordern nun, es seien die f und f' korrespondierenden Kugelpfeile F und F' ebenfalls als inverse Elemente zu definieren. Welche Beziehung besteht in diesem Falle zwischen F und F'?

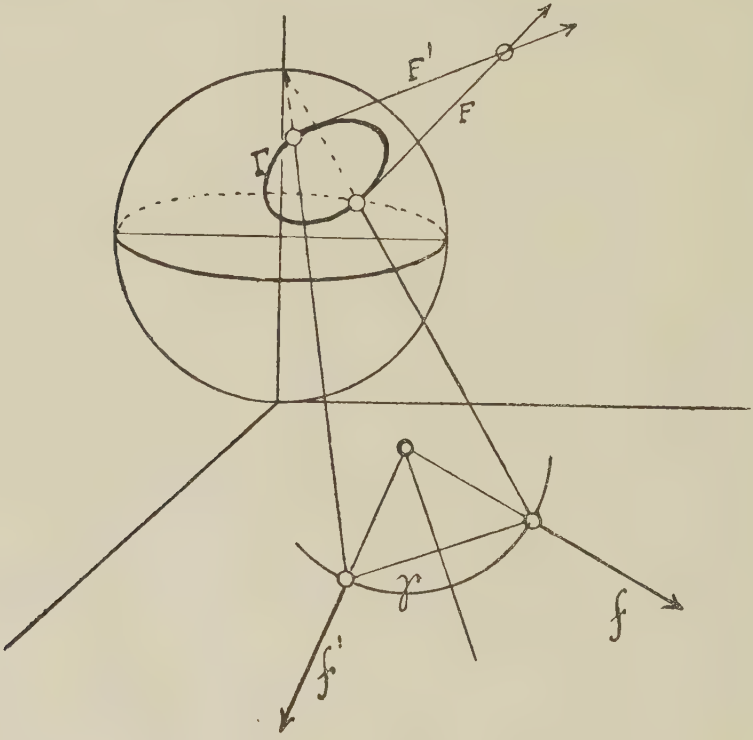

Fig. 4

f sowie f' bestimmen als inverse Pfeile eine sogenannte Spezialturbine. Darunter verstehen wir alle Pfeile, die senkrecht stehen auf dem Kreis γ, dem Ort ihrer Angriffspunkte. γ ist bestimmt durch die Angriffspunkte von f und f' sowie durch den

Mittelpunkt, als Schnittpunkt der beiden Pfeilgeraden von f und f'. Alle f, die längs γ angreifen und senkrecht auf ihm stehen, sind zueinander invers. Die Bildfigur auf der Kugel ist durch die folgenden Eigenschaften der stereographischen Projektion bestimmt: Kreise der Ebene transformieren sich in Kreise auf der Kugel. Dabei bleiben die Winkel erhalten. Als Folge davon wird beim Uebergang von der Ebene auf die Kugel auch nichts geändert an der Orthogonalität der Pfeile in bezug auf den Ort ihrer Angriffspunkte. Die Basis γ der durch f und f' bestimmten Spezialturbine projiziert sich in einen Kreis Γ. Längs Γ greifen die F an, die die Projektionen sind der an γ angreifenden f. Die F sind dann definitionsgemäss invers zueinander. Wegen der Erhaltung des Winkels bei der Projektion stehen sie sämtlich senkrecht auf Γ. Das bedingt, dass alle durch die Spitze des Tangentenkegels gehen. Dabei sind zwei Fälle möglich, die sich leicht aus der Betrachtung der Verhältnisse der Ebene ergeben. Es sind nämlich mit dem gleichen Basiskreis zwei Spezialturbinen möglich. Die inversen Pfeile können vom Angriffspunkt aus nach innen oder aussen gerichtet sein, d. h. sie können entweder nach dem gemeinsamen Schnittpunkt zielen oder von demselben wegweisen. Auf die Kugel übertragen heisst das: Entweder sind die sämtlichen F vom Angriffspunkt nach der Spitze des Tangentenkegels gerichtet oder aber entgegengesetzt orientiert. Nach Definition kommen für die inverse Lage immer nur gleichgerichtete Pfeile in Betracht. Wir bekommen schliesslich die alle Fälle bestimmende Regel: *Zwei Pfeile auf der Kugel sind invers, wenn ihre Geraden einander schneiden und in bezug auf den Schnittpunkt gleich gerichtet sind.*

Damit ist der grundlegendste Begriff der Ebene auch für die Kugel interpretiert, und es ist nun einfach die bekannte Theorie der Ebene auf die reelle Kugel zu übertragen. Die Projektion gestattet uns in jedem Fall, in der Ebene gewonnene Resultate auf der Kugel zu deuten und umgekehrt.

Die Turbine. Eine bedeutungsvollere Rolle als die Spezialturbine spielt in der Pfeilebene die Turbine schlechthin. Sie besteht aus sämtlichen Pfeilen, die längs eines Basiskreises γ angreifen und denselben unter einem konstanten Winkel α schneiden. Wir fragen nach der Bildfigur auf der Kugel. Infolge der Invarianz von Kreis und Winkel geht die Basis γ über in einen Kreis Γ. Die Pfeile der Turbine gehen über in gerichtete Tangenten längs Γ, die Γ unter dem nämlichen konstanten Winkel α schneiden. Die Pfeile der Turbine ergeben somit die Gesamtheit der gerichteten Tangentialrichtungen, die den gegebenen Kugelkreis Γ unter konstantem Winkel schneidet. Diese Gesamtheit ist aber eine gut bekannte Geradenschar. Man kann sich alle diese Richtungen auch entstanden denken dadurch, dass man eine der-

selben um eine bestimmte Achse sich drehen lässt. Aus dieser Erzeugungsart geht deutlich hervor, dass die erhaltenen Tangentialrichtungen nichts anderes darstellen als das eine System gerichteter Geraden auf einem Rotationshyperboloid, und zwar hier auf dem Hyperboloid, das unsere Kugel längs des Kreises Γ berührt.

Die Richtungen der Geraden in bezug auf den Angriffspunkt werden durch die Projektion eindeutig festgelegt. Damit ist schon die Zuordnung Turbine $\longrightarrow$ Hyperboloid erreicht, denn mit der einen Erzeugendenschar des Hyperboloides ist sofort auch die zweite gegeben. Die zweite Schar erhalten wir durch Interpretation einer Turbine, die wir zur ersten konjugiert nannten. Konjugierte Turbinen haben eine gemeinsame Basis. Die zwei Pfeile aber, die in jedem Punkte des Grundkreises angreifen, bilden mit dem letztern symmetrisch gleiche Winkel. Die Basis der Konjugierten liefert auf der Kugel nochmals Γ, die Pfeile hingegen ergeben längs Γ Tangentialrichtungen, die mit dem Berührungskreis symmetrisch gleiche Winkel bilden. Das entspricht der Eigenschaft zweier Erzeugenden durch den nämlichen Punkt des Hyperboloides. Eine Turbine und ihre Konjugierte bestimmen somit die zwei Systeme von Erzeugenden auf einem Rotationshyperboloid. Die Richtung der Erzeugenden ist in beiden Fällen eindeutig bestimmt. Der Figur der Ebene (siehe Figur 5) ist zu entnehmen, dass die Pfeile zweier konjugierten Turbinen vom Angriffspunkt aus nach der gleichen Seite der Basis gerichtet sind, was schon genügt, um die Richtungen der entsprechenden Kugelpfeile in bezug auf den Berührungskreis anzugeben. Es ist nun evident, dass auf ein und dasselbe Hyperboloid 4 Turbinen abgebildet werden können. In der Ebene haben sie alle die gleiche Basis. Die erste Turbine sei gebildet von den Pfeilen g, die vom Grundkreis nach aussen gerichtet und mit demselben den Winkel α bilden. Die Pfeile g' der dazu konjugierten sind ebenfalls in bezug auf die Basis auswärts orientiert und bilden mit ihr den Winkel $(-\alpha)$. Die dritte besteht aus den Pfeilen, die auf der Verlängerung der Pfeilgeraden der ersten Turbine liegen und vom Angriffspunkt aus nach dem Kreisinnern gerichtet sind, und die vierte endlich enthält die dazu konjugierten Pfeile. Die zwei letztern Turbinen entsprechen zwei ebenfalls konjugierten Geraden p und p' (Figur 5).

Die erste Turbine und ihre Konjugierte liefern das Hyperboloid einmal mit einer durch die Projektion bestimmten Orientierung, und die dritte mit ihrer Konjugierten liefert das entgegengesetzt orientierte Hyperboloid.

Das Turbinoid. Das Turbinoid ist die ebene Pfeilfigur, die sich zusammensetzt aus sämtlichen Pfeilen f', die zu einem festgewählten, f (Achsialpfeil), invers sind. Es enthält ∞^2 Turbinen, und diese bestimmen auf der Bildkugel ∞^2 Berührungskreise,

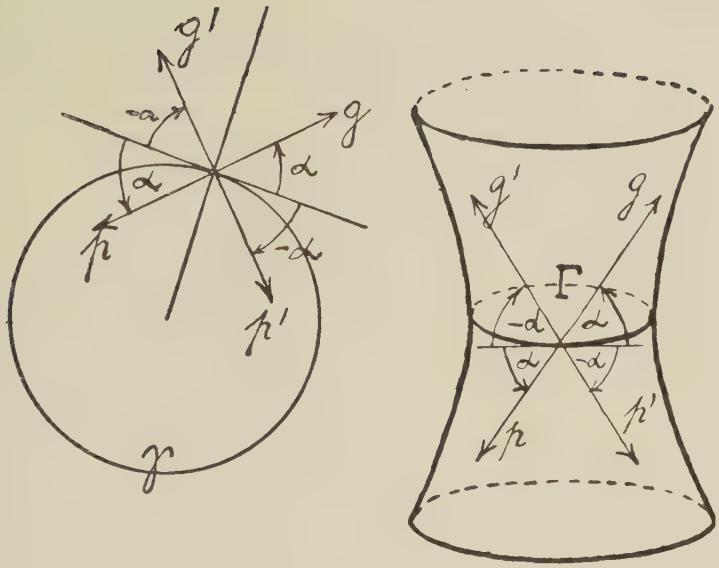

Fig. 5

längs denen die entsprechenden Hyperboloide die Kugel berühren. Unter diesen Turbinen befinden sich auch die Spezialturbinen. Auf der Kugel besteht die Bildfigur des Turbinoides aus allen Pfeilen F', die zu F, dem Bildpfeil des Axialpfeiles f, invers sind. Die Spezialturbinen unter der Gesamtheit der ∞^2 möglichen bestimmen die schon erwähnten Tangentialkegel. Es liegt auf der Hand, dass die Spitzen (M) dieser Kegel auf der Geraden des Axialpfeiles F liegen, denn die gerichteten Erzeugenden aller Kegel sind invers zu F, müssen ihn also schneiden. Die Kreise, längs denen die Bildkegel die Kugel berühren, berühren alle den durch den Angriffspunkt von F gehenden, zu ihm orthogonal stehenden Pfeil F^*. Der Sinn jedes Pfeiles ist eindeutig bestimmt. Wir können sagen:

Jede Sekante von F, die zugleich die Kugel berührt, trägt einen zu F inversen Pfeil. Das liegt einfach in der Definition des Kugelpfeiles enthalten.

---

§ 2. Die Liesche Transformation.

Auf dem Wege über die Pfeile der Ebene können wir jetzt die Kugelpfeile auf die Punkte des Raumes R_3 abbilden. Die Abbildung Pfeilebene $\longrightarrow R_3$ ist aus den vorangegangenen Kapi-

teln bekannt. Nach der Untersuchung der Abbildung Pfeilebene ⟶ Kugel ist man natürlich in der Lage, die Zuordnung Kugelpfeil ⟶ Punkt des R_3 anzugeben. Wir wollen diese Zuordnung auf ihre Eindeutigkeit hin überprüfen. Wenn wir von der Kugel in die Ebene hinuntersteigen, so ist der Nordpol der einzige Punkt, der dabei in Verdacht kommen kann, eine singuläre Stelle der Transformation zu sein und zu liefern. Die erste zu beantwortende Frage lautet deshalb: Was entspricht den Pfeilen G, die ihren Angriffspunkt im Nordpol haben? Ein Kugelpfeil kann in den Nordpol gelangen, indem sich sein Angriffspunkt längs eines Kreises durch den Pol bewegt. Ein solcher Kreis liefert nach der Projektion in der Ebene eine Gerade durch den Ursprung. Die Bildturbine in der Pfeilebene hat also eine Gerade zur Basis. Der Kugelpfeil kann sich so bewegen, dass er auf dem ganzen Wege seine Trajektorie berührt oder aber einen gewissen Winkel θ mit ihr einschliesst. θ bleibt durch die stereographische Projektion unverändert. Der Pol der Kugel wird ins Unendliche geworfen. Während also auf der Kugel der Pfeil dem Kreise durch den Pol entlang gleitet, bewegt er sich in der Ebene auf der Basisgeraden ins Unendliche. Im Unendlichen ist die Koordinate m, d. h. der Winkel, den der unendlich ferne Pfeil mit der Basis bildet, unbestimmt. Um eine eindeutige Zuordnung zu bekommen, müssen wir annehmen, dass der Pfeil auf seinem Wege ins Unendliche gegen eine gewisse Grenzlage konvergiert. Entsprechend heisst es auf der Kugel: Die Pfeile, die in den Nordpol gelangen längs eines Kreises durch denselben, konvergieren gegen eine Grenzlage. Wir wollen die letztere so annehmen, dass jeder Pfeil im Pol seine Trajektorie berührt. In der Ebene fällt dann der Bildpfeil in die Richtung der Basisgeraden. Damit haben wir einem Pfeil mit Angriffspunkt im Pol einen bestimmten Pfeil der Ebene zugeordnet. Es handelt sich nun noch darum, diesem Pfeil mit dem unendlich fernen Angriffspunkt und der angenommenen Grenzlage einen Punkt des R_3 entsprechen zu lassen. Das haben wir aber schon in Kapitel II getan und dort gesehen, dass dem gewählten Ebenenpfeil der Punkt des R_3 mit den Koordinaten $X = \infty$, $Y = \infty$, $Z = m =$ beliebig entspricht, d. h. ein Punkt der unendlich fernen Geraden der Ebene XY. Wir haben infolgedessen die Korrespondenz: Kugelpfeil G mit Angriffspunkt im Pol ⟶ P ($X = \infty$, $Y = \infty$, $Z =$ *beliebig*). Der Weg ist auch in der umgekehrten Richtung gangbar. Damit ist die Frage beantwortet. Den Pfeilen G mit dem Angriffspunkt im Nordpol entsprechen die Punkte der unendlich fernen Geraden der Grundebene.

Wir möchten ferner wissen, was den übrigen unendlich fernen Punkten des R_3 für Pfeile entsprechen. Zwei Fälle sind zu betrachten:

a) Der unendlich ferne Punkt des R_3 sei gegeben durch:

$X = a$, endlich und bestimmt
$Y = b$, » » » und $Z = \infty$.

Zu diesem Punkt des R_3 gehört (nach Kap. II) ein Ebenenpfeil mit den folgenden Bestimmungsstücken:

$$x = o,\ y = 0;\ m = \infty \text{ oder } \theta = 0$$

Es ist der Pfeil, dessen Angriffspunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt und der mit der x-Achse den Winkel $= 0$ einschliesst. Er fällt in die x-Achse. Die stereographische Projektion lässt ihn in Ruhe. Dem unendlich fernen Punkt $P(X = a,\ Y = b,\ Z = \infty)$ entspricht der Kugelpfeil mit dem Südpol als Angriffspunkt und in die x-Achse fallend.

b) Der Punkt im Unendlichen sei bestimmt durch:

$$X = \infty;\ Y = \infty;\ Z = \infty.$$

Nach Kapitel II hat der zugeordnete Pfeil der Ebene die Koordinaten

$x =$ endlich und bestimmt
$y =$ » » »
$m = \infty;\ \theta = 0$

also ein Pfeil mit bestimmten endlichen Koordinaten des Angriffspunktes und parallel der x-Achse. Die stereographische Projektion ergibt einen Kugelpfeil parallel zur x-Achse des Koordinatensystems mit bestimmten Koordinaten des Angriffspunktes. Für alle Grenzelemente hat sich somit eine eindeutige Zuordnung P des R_3 ⟶ Pfeil der Kugel ergeben. Das Resultat der bisherigen Untersuchungen ist das folgende:

In der Pfeilebene existiert eine Turbine. Ihr entspricht im Kugelraum ein gerichtetes Hyperboloid, das die Kugel berührt und das nichteuklidisch einfach als Kugel aufgefasst werden darf. Der gleichen Turbine ist aber auch eine Raumgerade zugeordnet.

$$\underbrace{\text{orientiertes Hyperboloid}}_{\text{nichteuklidische Kugel}} \longleftarrow \text{Turbine} \longrightarrow \text{Gerade des } R_3$$

Daraus ergibt sich ohne weiteres die direkte Korrespondenz

Gerade des R_3 ⟶ Kugel (nichteuklidisch)

und diese stellt eben die nach Lie benannte Transformation einer Geraden in eine Kugel in einem nichteuklidischen Raume dar. Lie selber hat diese Transformation nur für den Euklidischen Raum gegeben. so dass hier in unserem Fall eine Verallgemeine-

rung vorliegt. Herr Jobin hat in seiner Dissertation « Sur une généralisation de la transformation de S. Lie », Diss. Ecole polyt. Zürich, eine solche Verallgemeinerung versucht. Er kann aber, was mit Hilfe der Pfeile sehr wohl möglich ist, in Fällen, wo, wie bei uns, vier Turbinen auf die nämliche nichteuklidische Kugel abgebildet werden, die verschieden orientierten Flächen nicht auseinander halten.

---

§ 3. Die Berührungstransformation.

Die im vorigen Paragraphen beschriebene Transformation ist eine Berührungstransformation. Wir werden zunächst zeigen, dass durch sie Tangentialelement in Tangentialelement transformiert wird. Es mögen sich zwei Geraden des R_3 schneiden. Ihnen entsprechen in der Pfeilebene zwei Turbinen, die einen gemeinsamen Pfeil besitzen. Die Bildhyperboloide haben eine Erzeugende gemeinsam. Der Angriffspunkt, in dem die zwei zusammenfallenden Pfeile der Ebene ansetzen, projiziert sich in einen Kugelpunkt P, in dem die den Hyperboloiden gemeinsame Erzeugende angreift. Die Hyperboloide berühren die Kugel in P, berühren sich da auch gegenseitig. Zwei Hyperboloide aber, die eine gemeinsame Erzeugende haben, berühren sich noch in einem zweiten Punkt. Aus den Verhältnissen des R_3 heraus kann man leicht zeigen, dass die beiden Hyperboloide noch eine Gerade des zweiten Systems gemeinsam haben. Wenn sich unsere zwei Raumgeraden schneiden, so tun es auch ihre Polaren. Die Polare liefert aber in der Ebene die Konjugierte der ersten Bildturbine. Mit der Voraussetzung im Raume haben auch die Konjugierten der zwei Bildturbinen, der sich schneidenden Raumgeraden, einen gemeinsamen Pfeil. Dann haben aber die zwei Hyperboloide noch eine Gerade der Schar gemeinsam, die herstammt von den konjugierten Turbinen, also eine Gerade der zweiten Schar.

Zwei sich berührende Hyperboloide haben in den Berührungspunkten gemeinsame Tangentialebenen. In solchen Punkten bestehen sie aus den zwei sich schneidenden Erzeugenden der beiden Geradensysteme. Der Schnittpunkt ist also auch der Berührungspunkt.

Die zwei Raumgeraden, die sich schneiden, besitzen ein gemeinsames Flächenelement. Durch unsere Transformation geht es als Ganzes über in das Tangentialelement um den Berührungspunkt der Hyperboloide. Das ist aber das Merkmal einer Berührungstransformation.

---

§ 4. Uebergang zur Lieschen Abbildung.

Es ist bis jetzt das Folgende gezeigt worden: Die Punkte des R_3 lassen sich auf dem Wege über die Pfeile der Ebene überall eindeutig den Pfeilen auf der Kugel zuordnen. Einer Geraden des R_3 entsprach ein Hyperboloid. Es ist im hyperbolischen Raum als Kugel zu betrachten, weil es eine Fläche zweiten Grades darstellt, die die absolute Fläche längs eines ebenen Schnittes berührt. Die Zuordnung Gerade ⟶ Hyperboloid, die vermittelst des Zwischengliedes der Pfeilebene, der Turbine, gelang, kann nunmehr als « Gerade-Kugel » - Transformation in einem hyperbolischen Raume bezeichnet werden.

R_3	*Pfeilebene*	*hyperbol. Raum*
Gerade ⟵	Turbine	⟶ Hyperboloid
		(nichteuklidische Kugel)

Es muss gezeigt werden, dass unsere Zuordnung Gerade ⟶ nichteuklidische Kugel ohne Ausnahme umkehrbar eindeutig ist. Ist der Nachweis dafür geleistet, so liegt eine Verallgemeinerung der nach Lie benannten « Gerade - Kugel » - Transformation auf den nichteuklidischen Raum vor. Die Eindeutigkeit der Transformation kann auf folgendem Wege verwirklicht werden.

Es ist bekannt, dass sich auf ein und dieselbe Kugel (nichteuklidisch) vier Turbinen der Pfeilebene oder vier Raumgeraden abbilden. Statt einer ein-eindeutigen Zuordnung hätten wir dann eine ein-vierdeutige. Schon früher wurde diese letztere auf eine ein-zweideutige Beziehung reduziert dadurch, dass die nichteuklidische Bildkugel einer doppelsinnigen Orientierung unterworfen wurde. Diese Orientierung kam so zustande, dass die beiden Scharen der Erzeugenden die entgegengesetzte Richtung bekamen. Nach dieser Orientierung entspricht zwei Geraden von den vier, der Geraden g und ihrer Polaren g', die in einem ersten Sinne orientierte Kugel, während einer dritten Geraden p und ihrer Polaren p' die nämliche nichteuklidische Kugel mit entgegengesetzter Orientierung zugeordnet ist. Wir haben es da immer noch mit Geradenpaaren zu tun, die die Transformation mehrdeutig erscheinen lassen (siehe Figur 5). Die Eineindeutigkeit kann so erhalten werden, dass man die Geraden der zwei Scharen orientiert und so eine vierfache Orientierung des Hyperboloides bekommt. Es würde z. B. der Geraden p die plus orientierte erste Schar und der Geraden g die minus orientierte erste Schar entsprechen. Es entstehen so die vier Fälle:

$$(I+);\ (I-);\ (II+);\ (II-)$$

Durch eine gewisse imaginäre Transformation kann man vom Aeussern der Kugel ins Innere gelangen. Im Innern der

Bildkugel bestehen die zwei Scharen von Erzeugenden aus Geraden, die zueinander konjugiert imaginär sind.

Auch das Kugelinnere lässt sich in einer gewissen Form orientieren. Natürlich ist diese Orientierung nicht mehr ganz absolut dieselbe wie im Falle des Hyperboloides. Aber das Plus- oder Minuszeichen der frühern vier Symbole würde aufgefasst werden können als positive oder negative Ladung der Kugel, während *I*- und *II*-Zeichen einem auf der Kugel einzuführenden Drehungssinn entsprechen würden. Wir erreichen so schliesslich eine vierfach orientierte Kugel, die uns nun für jeden Fall eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Gerade und Kugel gestattet. Mehrdeutigkeit der Lieschen Transformation im nichteuklidischen Raume ist damit ausgeschlossen. Auf dem Wege der Abbildung $R_3 \longrightarrow$ Pfeilebene $\longrightarrow$ Kugelraum gelangt man, was hervorzuheben ist, auf die denkbar einfachste Weise zu der berühmten Transformation in verallgemeinerter Form. Die Resultate, die sich dabei ergeben, sind ähnlich denjenigen, die Herr H. Beck in seiner Arbeit « Zur Lieschen Kugelgeometrie im nichteuklidischen Raum », Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 32, 5.—8. Heft, Seite 132—147, veröffentlichte. Herr Beck hat in einer noch weiter zurückliegenden Arbeit gefunden, dass die Liesche Transformation in einem nichteuklidischen Raum zwar allgemein gültig gemacht werden kann, dabei aber doppeldeutig bleibt. In der zitierten Note wird dann auf verhältnismässig kompliziertem analytischem Wege gezeigt, dass die doppeldeutige Beziehung in der nichteuklidischen Kugelgeometrie in eine lückenlos eindeutige übergeführt werden kann. Auch Herr Beck legt zu diesem Zweck seiner Abbildung eine vierfach orientierte Kugel zugrunde. Er findet, dass der Plückersche Linienraum denselben Zusammenhang aufweist wie die Mannigfaltigkeit seiner orientierten Kugeln. Daraus ergibt sich dann die Möglichkeit einer umkehrbar eindeutigen Abbildung Gerade $\longrightarrow$ Kugel. In unserem Falle ergibt sich aber diese vierfache Orientierung der Kugel in geradezu hervorragend einfacher Weise aus der Tatsache, dass eine Turbine vierfach orientiert werden kann.

---

§ 5. Das Flächenelement.

Im Paragraph 3 wurde gezeigt, dass die vorliegende Transformation eine Berührungstransformation darstellt. Zwei sich schneidende Geraden des Linienraumes liefern zwei Turbinen der Pfeilebene mit einem gemeinsamen Pfeil. Die Bildfigur im hyperbolischen Raume besteht aus zwei nichteuklidischen Kugeln, die eine gemeinsame Erzeugende haben und einander in zwei

Punkten — einer ist unwesentlich — berühren. Das gemeinsame Flächenelement der zwei sich schneidenden Geraden transformiert sich in das gemeinsame Tangentialelement der zwei sich berührenden Kugeln. Wir wollen hier kurz untersuchen, in welcher Form das Flächenelement in der Pfeilebene dargestellt werden könnte, damit es auch pfeilgeometrisch eine Bedeutung hat. Im Linienraum kann das Flächenelement (Punkt und Ebenenstück) gegeben werden durch ein Büschel einander treffender Geraden. Im Kugelraum wird es dann entsprechend dargestellt durch das gemeinsame Tangentialelement eines Büschels berührender Kugeln. Uebersetzt man das in die Unterebene, so erhält man da ein Büschel von Turbinen mit gemeinsamem Pfeil. Diese Deutung enthält aber nichts, das uns in bezug auf die Pfeilgeometrie etwas liefern könnte. Wir müssen im Linienraum von einer andern Darstellung des Flächenelementes ausgehen, um auch in der Unterebene eine sinngemässere Deutung zu erhalten. Es lässt sich im R_3 das Flächenelement auch angeben durch einen Punkt Q und ein Ebenenelement π durch diesen Punkt. Die Ebene π kann nun sicher einem bestimmten Punkt P des Raumes zugeordnet werden als dessen Polarebene in bezug auf den Fundamental-Linienkomplex. π als Polarebene von P betrachtet, ist durch den Pol P bestimmt. Wir könnten somit in dem Paar von Bestimmungsstücken des räumlichen Flächenelementes $(Q\ \pi)$ die Ebene π ersetzen durch den in unserem Falle π aequivalenten Punkt P. Das Flächenelement wäre dann bestimmt durch das Punktepaar (PQ). P und Q sind konjugierte Punkte, da Q in der Polarebene von P liegt. Uebersetzt man das durch (PQ) gegebene Flächenelement in die Unterebene, so sieht man sofort den Wert der neuen Darstellung ein. P und Q liefern unten zwei Pfeile, die zueinander invers sind. Das Gegenstück zum räumlichen Flächenelement in der Unterebene ist ein Paar inverser Pfeile. Das ist nun eine Deutung, mit der sich rein pfeilgeometrisch etwas anfangen lässt. Man könnte versuchen, nachdem eine zweckmässige Darstellung des Flächenelementes in der Pfeilebene gelungen ist, die ganze von Study geschaffene « Geometrie der Flächenelemente » in der Pfeilebene zu deuten. Die Resultate entbehrten sicher nicht des Interesses.

IV. KAPITEL.

Die Verallgemeinerung des Begriffs „invers".

§ 1. Die lineare Kongruenz (LM) und ihre Deutung in der Pfeilebene.

Herr Matasaru ist in seiner Arbeit von der von de Saussure gegebenen Bedeutung des Begriffes « invers » ausgegangen. Durch Anwendung seiner Transformationsformeln erhält er als räumliches Bild der zu einem festen Pfeile f_0 inversen Pfeile die Punkte der Ebene: $Z_0X - X_0Z - (Y - Y_0) = 0$

Mit variabeln $X_0Y_0Z_0$ liefert das den bekannten Komplex, den wir mit M bezeichnen.

M: $p_{13} - p_{20} = 0$, wo p_{13}, p_{20} Plückersche Linienkoordinaten sind.

M ist ein sehr spezieller Komplex. Der gewöhnliche Raum R_3 enthält ∞^5 Linienkomplexe, und es stellt sich hier die Frage, ob es nicht möglich sei, jeden der ∞^5 Komplexe zu einer Definition von « invers » zu benutzen, wobei man natürlich den Begriff « invers » verschieden zu definieren hätte. Der Umstand, dass man beim Ausgang vom de Saussureschen « invers » auf einen speziellen Bildkomplex geführt wird, scheint dafür zu sprechen, dass auf Grund einer allgemeinern Fassung dieses Begriffes auch ein allgemeinerer Bildkomplex des R_3 erreicht werden müsste.

Wir werden die Aufgabe umgekehrt zu lösen trachten. Im Zusammenhang mit dem M-Komplex werden wir den allgemeinen Linienkomplex des Raumes zu konstruieren versuchen, und nachdem wir ihn haben, auch die entsprechende Beziehung zwischen den Originalpfeilen zu erhalten trachten.

Die lineare Kongruenz. Eine lineare Kongruenz ist die Schnittfigur zweier Komplexe. Sie besteht aus sämtlichen Treffgeraden zweier bestimmten Geraden t_1 und t_2, die die Träger der Kongruenz heissen. Von diesen Trägern ist bekannt, dass sie konjugierte Geraden darstellen in bezug auf alle Komplexe, welche diese Kongruenz enthalten. Wenn eine Kongruenz beispielsweise in einem Komplex L liegt, so sind ihre Träger konjugiert in bezug auf L. Wir fassen nun die Kongruenz ins Auge, die gebildet wird durch die Komplexe L und M, wo M der schon mehrmals erwähnte spezielle Bildkomplex ist, während unter L ein allgemeiner Linienkomplex des Raumes verstanden sei. Nach dem Vorausgegangenen ist klar, dass die Träger t_1 und t_2 dieser Kongruenz konjugiert sind in bezug auf L und M. In der Ebene bekommt man für t_1 und t_2 zwei konjugierte Turbinen, d. h. Tur-

binen mit derselben Basis, aber mit symmetrischen Richtungen entsprechender Pfeile in bezug auf die Basis.

Die Treffgeraden von t_1 und t_2. Jede Treffgerade ist zugleich eine Gerade von L und M, da sie in der Kongruenz (LM), der Schnittfigur beider Komplexe liegt. Nun liefern alle Geraden von M in der Pfeilebene Spezialturbinen. Die Geraden von M fallen als Komplexgeraden mit ihren Konjugierten zusammen. Das hat zur Folge, dass auch die zugeordneten Turbinen mit ihren Konjugierten zusammenfallen.

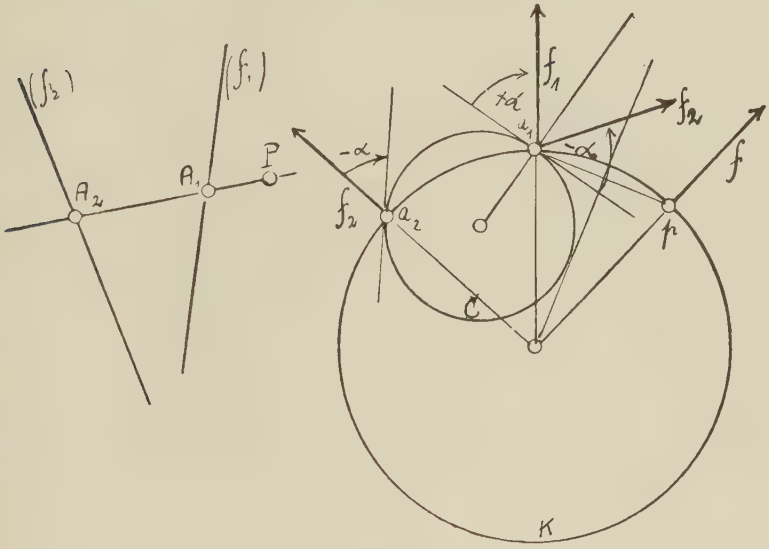

Fig. 6

Das ergibt also die Spezialturbinen. Nun geht durch jeden Punkt des Raumes eine Treffgerade von t_1 und t_2. Ihr entspricht jeweilen in der Unterebene eine zu bestimmende Spezialturbine.

Die Figur bestätigt, dass, wie es durch die Verhältnisse im Raum bestimmt ist, f_1 in der ersten der zwei konjugierten Turbinen, f_2 sich aber in der zweiten befindet. Ist der Winkel zwischen f_1 und dem Kreise C gleich α, so zeigt die Zeichnung, dass derjenige zwischen f_2 und C gleich $(-\alpha)$ beträgt. Das bestätigt die Zugehörigkeit von f_2 zur zweiten Turbine. Der Kreis K als Bild der Transversalen, geht durch den Angriffspunkt von f. f steht senkrecht auf K, weil die Transversale, als Gerade von M, eine Spezialturbine liefern muss. Man sieht auch, dass der Mittelpunkt von K natürlich auf der Angriffslinie von f liegt. K schneidet C unter konstantem Winkel $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

§ 2. Das Komplexbüschel.

Jetzt wollen wir dazu übergehen, den einzelnen Komplex im Büschel vollständig zu bestimmen. Zuerst mögen die Polarebenen des Punktes P in bezug auf M und L angegeben werden. Die Polarebene von P in bezug auf M ist sofort bestimmt. Sie ist die Ebene aller Komplexgeraden durch den Punkt P. Die Transversale t ist eine solche, also geht die Ebene durch t. Wir bezeichnen die Polarebene von P in bezug auf M mit ν. Analog erhält man als Polarebene von P in bezug auf L eine Ebene λ. Angenommen, wir wollen in bezug auf M den Pol von λ bestimmen. Dieser Pol liegt auf jeder Geraden des Komplexes M, also liegt er auch auf t. Wir bezeichnen ihn mit Q. Wir bestimmen auf t noch zwei weitere Pole der Ebene λ, für zwei andere Komplexe des Büschels. Alle Treffgeraden von t_1 bilden einen Spezialkomplex unseres Büschels. Geraden dieses Komplexes liegen auch in der Ebene λ. Wir können uns fragen, wo der Pol von λ in bezug auf den Spezialkomplex, den die Treffgeraden von t_1 bilden, sei. t ist nochmals eine der Treffgeraden. Der Pol von λ in bezug auf diesen Spezialkomplex ist definiert als Schnittpunkt der Komplexgeraden in λ. Es ist der Schnittpunkt von t mit t_1, den wir mit A_1 benennen. Ein vierter Komplex, den wir berücksichtigen wollen, ist der Spezialkomplex, der aus den Treffgeraden von t_2 besteht. Der Pol von λ in bezug auf diesen Spezialkomplex ist der Schnittpunkt von t mit t_2, er heisse A_2. So bekommen wir auf t die vier Pole von λ in bezug auf vier Komplexe des Büschels, das durch die L und M gemeinsame Kongruenz bestimmt ist (siehe Figur 7).

---

§ 3. Die Transformation $T: P \longrightarrow Q$.

Nun bilden diese vier Punkte PQA_1A_2 auf jeder Geraden ein konstantes Doppelverhältnis, natürlich unter der selbstverständlichen Voraussetzung, dass L und M fest seien. Der Satz von Reye, der uns dies zeigt, lautet: *Die Nullpunkte beliebiger Ebenen bezüglich der ∞^1 linearen Komplexe eines Komplexbüschels bilden Punktreihen, und die Nullebenen beliebiger Punkte bilden Ebenenbüschel I. Ordnung, welche durch die Komplexe des Büschels projektiv aufeinander bezogen sind.*

Bei einer Projektivität bleibt das Doppelverhältnis von vier entsprechenden Punkten invariant.

Es ist auch $P \overline{\wedge} \lambda$ in bezug auf L (weil polar)
und $\lambda \overline{\wedge} Q$ in bezug auf M (weil polar)
folglich $P \overline{\wedge} Q$

Die Formeln der Transformation $P \longrightarrow Q$ sollen nun auf analytischem Wege ermittelt werden. Da eine Projektivität sich ergeben muss, so kennen wir die allgemeine Form der Formeln zum voraus. Es müssen sich linear gebrochene Ausdrücke ergeben. Bei der Darstellung der Koordinaten von P in Funktion derjenigen von Q werden wir die Koordinate X des Punktes A_1 als Parameter betrachten.

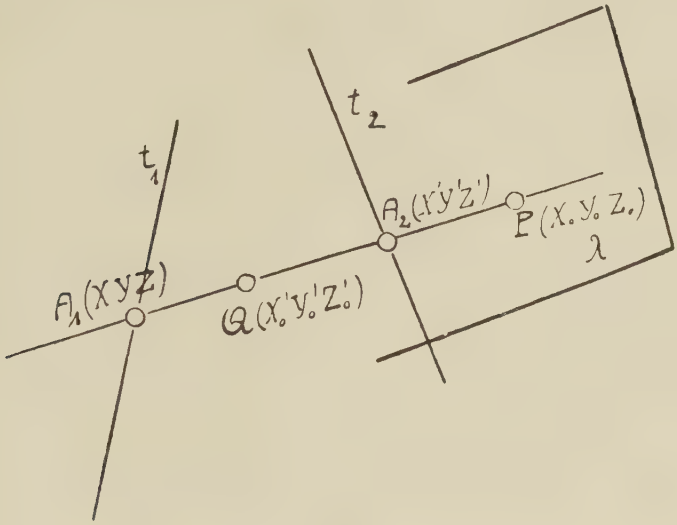

Fig. 17

$X_0 Y_0 Z_0$ von P, ausgedrückt durch die Koordinaten der festen Punkte A_1 und A_2 lassen sich schreiben:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{X+\mu X'}{1+\mu} \\ Y_0 &= \frac{Y+\mu Y'}{1+\mu} \\ Z_0 &= \frac{Z+\mu Z'}{1+\mu} \end{aligned}\right\} P, \quad \text{und analog sind} \quad \left.\begin{aligned} X_0' &= \frac{X+\mu' X'}{1+\mu'} \\ Y_0' &= \frac{Y+\mu' Y'}{1+\mu'} \\ Z_0' &= \frac{Z+\mu' Z'}{1+\mu'} \end{aligned}\right\} Q$$

Diese parametrische Darstellung zeigt unmittelbar:

$\mu = 0$ ergibt den Punkt A_1;
$\mu = \infty$ ergibt den Punkt A_2
$u = \mu$ ergibt den Punkt $P(X_0 Y_0 Z_0)$;
$\mu = \mu'$ ergibt den Punkt $Q\,(X_0' Y_0' Z_0')$.

Das Doppelverhältnis der vier Nullpunkte heisst:

$$(A_1A_2PQ) = \frac{A_1P}{PA_2} : \frac{A_1Q}{QA_2} = \frac{0-\mu}{0-\mu'} : \underbrace{\frac{\infty-\mu}{\infty-\mu'}}_{1} = \frac{\mu}{\mu'} = k = \text{konstant}$$

nach Voraussetzung. Daraus folgt

$$\mu' = \frac{\mu}{k}$$

Mit diesem Werte für μ' lauten die Gleichungen der parametrischen Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{X+\mu X'}{1+\mu} \\ Y_0 &= \frac{Y+\mu Y'}{1+\mu} \\ Z_0 &= \frac{Z+\mu Z'}{1+\mu} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} X_0' &= \frac{X+\frac{\mu}{k}X'}{1+\frac{\mu}{k}} \\ Y_0' &= \frac{Y+\frac{\mu}{k}Y'}{1+\frac{\mu}{k}} \\ Z_0' &= \frac{Z+\frac{\mu}{k}Z'}{1+\frac{\mu}{k}} \end{aligned}\right\}$$

Die laufenden Punkte auf dem ersten und zweiten Träger kennen wir in der Form

$$\left.\begin{aligned} Y &= -\,sha X + cha \\ Z &= -\,cha X + sha \end{aligned}\right\} \text{ erster Träger } t_1$$

$$\left.\begin{aligned} Y' &= sha X' + cha \\ Z' &= -\,cha X' - sha \end{aligned}\right\} \text{ zweiter Träger } t_2$$

Setzen wir diese Werte von Y, Z, Y', Z' in die parametrische Darstellung ein, so ergeben sich die Beziehungen

1) $X_0(1+\mu) - X - \mu X' = 0$
2) $Y_0(1+\mu) + sha X - \mu sha X' - ch\,a(1+\mu) = 0$
3) $Z_0(1+\mu) + cha X + \mu cha X' + sha(\mu - 1) = 0$

$$4)\ X_0'(k+\mu) - kX - \mu X' = 0 \qquad \text{wo } k = \frac{\mu}{\mu'}$$

$$5)\ Y_0'(k+\mu) + k\,sha X - \mu\,sha X' - cha(k+\mu) = 0$$

$$6)\ Z_0'(k+\mu) + k\,cha X + \mu\,cha X' + sha(\mu - k) = 0$$

Aus *1) 2) 3)* lassen sich μ, $\mu X'$ und X berechnen. Man bekommt:

$$\mu = \frac{sha - cha X_0 - Z_0}{sha + cha X_0 + Z_0}$$

$$\mu X' = \frac{sha\, X_0 + Y_0 - cha}{sha + cha X_0 + Z_0}$$

$$X = \frac{sha\, X_0 - Y_0 + cha}{sha + cha X_0 + Z_0}$$

Mit diesen Werten geht man in die Gleichungen *4, 5, 6.* Es ergeben sich drei Gleichungen für $X_0' Y_0' Z_0'$ in Funktion von $X_0 Y_0 Z_0$. Aus ihnen erhält man:

$$X_0' = \frac{k(sha X_0 - Y_0 + cha) + sha X_0 + Y_0 - cha}{k(sha + cha X_0 + Z_0) + (sha - cha X_0 - Z_0)}$$

$$Y_0' = \frac{k(X_0 + sha Y_0 + cha Z_0) - X_0 - cha Z_0 + sha Y_0}{k(sha + cha X_0 + Z_0) + (sha - cha X_0 - Z_0)}$$

$$Z_0' = \frac{k(-1 + cha\, Y_0 + sha Z_0) + 1 - cha Y_0 + sha Z_0}{k(sha + cha X_0 + Z_0) + sha - cha X_0 - Z_0}$$

Es ergeben sich somit die $X_0' Y_0' Z_0'$ als linear gebrochene Funktionen von $X_0 Y_0 Z_0$, d. h. die Zuordnung $P \longrightarrow Q$ ist in der Tat projektiv. Man sieht ohne weiteres, dass sich für $k = 0$ bestimmte Punkte auf dem zweiten Träger t_2, für $k = \infty$ solche des ersten Trägers t_1 ergeben.

---

§ 4. Der allgemeine Komplex des Büschels.

Den allgemeinen Komplex unseres Büschels bekommen wir auf folgendem Wege. Wir kennen die Focalebene von $P(X_0 Y_0 Z_0)$ in bezug auf M. Sie lautet:

$$Z_0 X - X_0 Z - (Y - Y_0) = 0$$

Bilden wir nun die Focalebene des Punktes $Q(X_0' Y_0' Z_0')$ in bezug auf L. Es ist einfach der Pol $P(X_0 Y_0 Z_0)$ durch

$Q(X_0' Y_0' Z_0')$ zu ersetzen. Diese Ersetzung zeitigt das folgende Resultat:

$$-sha(k+1)\left\{(Z_0X-X_0Z)-(Y-Y_0)\right\}+(k-1)\left\{(X-X_0)+cha\right.$$
$$\left.(Z-Z_0)-cha(XY_0-YX_0)+(Z_0Y-ZY_0)\right\}=0$$

oder anders geschrieben:

$$\underbrace{sha\left\{(Z_0X-X_0Z)-(Y-Y_0)\right\}}_{M}-\frac{k-1}{k+1}\underbrace{\left\{(X-X_0)\right.}$$
$$\underbrace{\left.+cha(Z-Z_0)-cha(XY_0-YX_0)+(Z_0Y-ZY_0)\right\}}_{L}=0$$

Der erste Klammerausdruck stellt den wohlbekannten M-Komplex dar, die zweite Klammer einen Komplex L, der mit M zusammen die zwei Grundelemente des betrachteten Komplex-büschels bildet. Mit $(-\frac{k-1}{k+1})=\tau$ gesetzt, können wir schreiben:

$$shaM+\tau L=0$$

Das liefert aber einfach den allgemeinen Komplex unseres Büschels, weil τ ganz beliebig wählbar ist.

---

§ 5. Transformation des Grundkomplexes M.

Wir haben früher die Gleichungen der Transformation $T: P \longrightarrow Q$ berechnet. Jetzt wollen wir auch den Komplex M dieser Transformation unterziehen. Dabei sind die beiden Variabelnreihen — und nicht nur eine, wie bei der unmittelbar vorausgehenden Betrachtung — zu transformieren.

Die Transformation $P \longrightarrow Q$ ist, wie gezeigt, projektiv. Sie muss im allgemeinen einen linearen Komplex wieder in einen solchen überführen. Nun soll speziell der Grundkomplex $M(XYZ, X_0Y_0Z_0)$ nach den erhaltenen Formeln transformiert werden:

$$M: Z_0X-X_0Z-(Y-Y_0)=0$$

Ersetzen wir die Variabeln $X_0 Y_0 Z_0$, $X_0'^* Y_0'^* Z_0'^*$, wie früher erläutert. Das liefert:

$$\Big\{k(-1+chaY_0+shaZ_0)+(1-chaY_0+shaZ_0)\Big\}\Big\{k(shaX-Y+cha)+(shaX+Y-cha)\Big\}$$

$$-\Big\{k(shaX_0-Y_0+cha)+(shaX_0+Y_0-cha)\Big\}\Big\{k(-1+chaY+shaZ)+(1-chaY+shaZ)\Big\}$$

$$-\Big\{k(X+shaY+chaZ)+(shaY-chaZ-X)\Big\}\Big\{k(sha+chaX_0+Z_0)+(sha-chaX_0-Z_0)\Big\}$$

$$+\Big\{k(X_0+shaY_0+chaZ_0)+(shaY_0-chaZ_0-X_0)\Big\}\Big\{k(sha+chaX+Z)+(sha-chaX-Z)\Big\}=0$$

Die Gleichung wird quadratisch in k. Die Ausrechnung ergibt als Koeffizienten von k^2 den Ausdruck

$$2sha\Big\{\underbrace{sha(Z_0X-ZX_0+Y_0-Y)}_{=M}$$

$$-cha\ \underbrace{(YX_0-XY_0+Z-Z_0)+(ZY_0-YZ_0+X_0-X)}_{=-L}\Big\}$$

Dieser lässt sich schreiben: $2sha(shaM-L)$, und das ganze Glied in k^2 heisst:

$$2k^2sha\,(shaM-L)$$

Die Berechnung des Koeffizienten von k ergibt:

$$-2Y+2Y\underbrace{(ch^2a-sh^2a)}_{+1}+2Y_0\underbrace{(sh^2a-ch^2a+1)}_{=0}$$

$$+2XZ_0\underbrace{(sh^2a-ch^2a+1)}_{=0}+2ZX_0\underbrace{(ch^2a-sh^2a-1)}_{=0}$$

d. h. der Koeffizient von k ist gleich null.

Das von k freie Glied liefert:

$$2sha\Big\{sha\underbrace{(Z_0X - X_0Z + Y_0 - Y)}_{M}$$
$$-cha\ \underbrace{(XY_0 - YX_0 + Z_0 - Z) + (YZ_0 - ZY_0 + X - X_0)}_{L}\Big\}$$

oder: $2sha(shaM + L)$

Vom ganzen transformierten Grundkomplex bleibt noch

$$2sha\Big\{k^2(shaM - L) + shaM + L\Big\} = 0$$
$$k^2(shaM - L) + shaM + L = 0$$
$$shaM(k^2+1) - L(k^2 - 1) = 0$$
$$shaM - L\,\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = 0$$

Die Transformation $T : P \longrightarrow Q$ transformiert den Grundkomplex M in einen beliebigen Komplex, der auch die Grundkongruenz enthält. Man erhält den transformierten Komplex aus dem früher berechneten allgemeinen Büschelkomplex, indem man in diesem letztern im Ausdruck für τ, k durch k^2 ersetzt.

---

§ 6. Die Verrückung der Pfeile.

Wir haben bis jetzt zwei für das folgende wichtige Eigenschaften erhalten:

a) Die Transformation $T : P \longrightarrow Q$ führt den M-Komplex über in einen andern Komplex $N = M + \tau L$ eines auch M enthaltenden Büschels.

b) Die Ersetzung von P durch Q in der polaren Zuordnung $P \longrightarrow \lambda$ führt zu der andern polaren Zuordnung $Q \longrightarrow \lambda$, die auch wieder einen Komplex desselben Büschels wie früher bestimmt.

Diese zwei Eigenschaften gestatten nun die Beantwortung der Frage: Wie lässt sich der Begriff « invers » verallgemeinern?

1. Invers sollen die Pfeile f' und f'' sein, die Punkten Q' und Q'' entsprechen, welche in bezug auf den Komplex N konjugiert sind. Diese Punkte Q' und Q'' erhält man aber dadurch, dass man die Transformation $T : P \longrightarrow Q$ auf zwei Punkte P' und P'' anwendet, die bezüglich M konjugiert sind.

In der Pfeilebene erfordert dies erstens die Deutung der Zuordnung $P \longrightarrow Q$ als Pfeiltransformation, und zweitens zwei nach de Saussure « inverse » Pfeile dadurch zu transformieren. Die erhaltenen Pfeile sind dann invers im verallgemeinerten Sinne.

2. Beschreibung der Transformation $T : P \longrightarrow Q$ als Pfeiltransformation.

Wir haben schon früher die Verhältnisse des Raumes übersetzt. Die Träger t_1 und t_2 der Schnittkongruenz liefern die zwei inversen Turbinen mit demselben Grundkreis C und den symmetrischen Winkeln α und $(\pi - \alpha)$.

Die Transversale $t = PQA_1A_2$ liefert eine Spezialturbine, deren Grundkreis mit C den Winkel $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ einschliesst. Die Transformation $T : P \longrightarrow Q$ erzeugt nun einfach eine gewisse noch zu beschreibende Zuordnung der Pfeile dieser Turbine. Sind m_1 und m_2 die $Z(=m)$ Koordinaten der Punkte A_1 und A_2, so hat man für einen beliebigen Punkt der Geraden A_1A_2 die parametrische Darstellung:

$$m = \frac{m_1 + \chi m_2}{1 + \chi} \; ; \; Z = \frac{Z_1 + \chi Z_2}{1 + \chi}$$

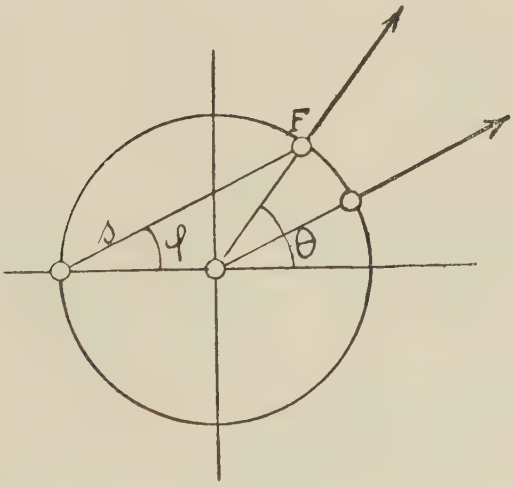

Fig. 8

Die Figur zeigt, dass m auch als Parameter gewählt werden kann für die Angriffspunkte der Pfeile der Turbine, so dass aus

der projektiven Zuordnung auf der Geraden eine projektive Zuordnung der Strahlen s und somit der Punkte F hervorgeht.

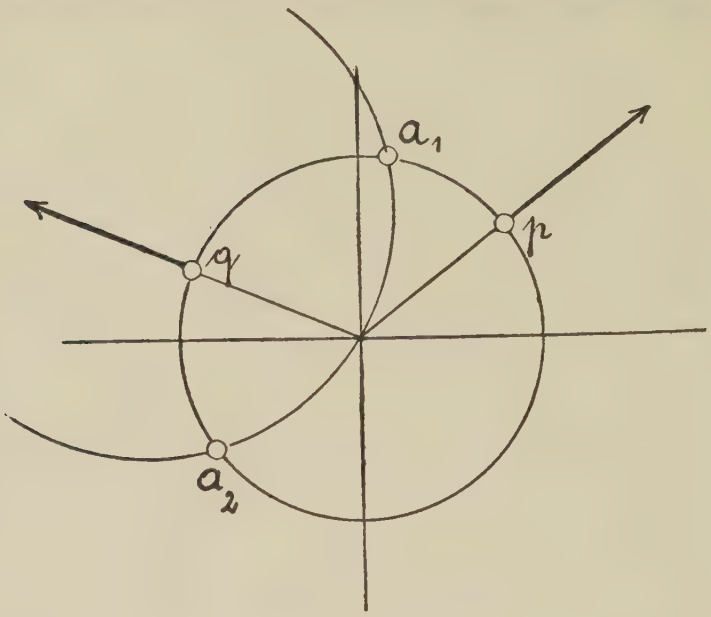

Fig. 9

Wenn also a_1 und a_2 die Schnittpunkte des Kreises C mit dem Kreise K sind, p und q die Angriffspunkte der P und Q entsprechenden Pfeile, so ist einfach das Doppelverhältnis $(a_1 a_2 pq)$ = konstant und gleich dem Doppelverhältnis der vier Bildpunkte.

$$(a_1 a_2 pq) = (A_1 A_2 PQ) = k$$

Eine solche Transformation nennen wir eine « *Verrückung* », und wir können jetzt das erreichte Resultat so formulieren:

Irgend zwei Pfeile können als « invers » (neue Fassung) erklärt werden, wenn sie durch eine Verrückung aus zwei im alten oder auch neuen Sinne inversen Pfeilen entstehen.

1. Bemerkung. Die Verrückung ist bestimmt:

durch einen festen Kreis
durch einen festen Winkel
und ein festes Doppelverhältnis } feste Turbine.

3. Es werden durch das bis jetzt Erreichte nicht alle Möglichkeiten erfasst. Im Ausdruck: $M + \tau L = 0$ hat τ die Bedeutung

$$\text{von} \qquad \tau = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

Es können daher mit reellem k ($k^2 > 0$) nur die Werte von τ erhalten werden, die zwischen $\tau = +1$ und $\tau = -1$ liegen. Um auch die andern Werte zu bekommen, kann man die Eigenschaft (b) zu Hilfe ziehen. Mit Hilfe dieser Eigenschaft ist es leicht, den Komplex τ beispielsweise in den Komplex $-\frac{1}{\tau}$ zu transformieren. Man kann aber auch direkt den allgemeinsten Komplex bekommen mit

$$\tau = \frac{k-1}{k+1}$$

Die Zuordnung lässt sich jetzt offenbar folgendermassen formulieren:

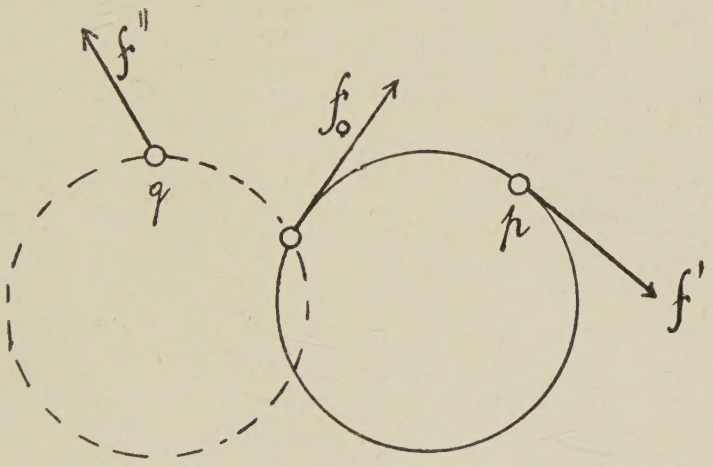

Fig. 10

Zwei Pfeile f' und f'' sind invers (neue Fassung), wenn der eine dem Pfeil f_0 im alten Sinne invers ist, der aus dem erstern durch eine « Verrückung » entsteht.